This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
AB. 1870; AM. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871-1922

G MATHEMATICS R.3
QA
103
.G317
1897.

GRAD. R. R. 3
QA

TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE
ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DES COURS PROFESSIONNELS
DES CANDIDATS AUX ÉCOLES SPÉCIALES DES INGÉNIEURS
ET A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BELGIQUE

PAR
L'ABBÉ E. GELIN
DOCTEUR EN PHILOSOPHIE ET EN SCIENCES
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES ET SPÉCIALES [illegible]

Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique
adopté et spécialement recommandé
par le Conseil de perfectionnement de l'Enseignement moyen
pour les classes supérieures de la section scientifique des athénées
et l'École militaire de Belgique

SIXIÈME ÉDITION

NAMUR
LIBRAIRIE WESMAEL-CHARLIER
RUE DE FER, 33

Huy, chez l'auteur. [illegible]

[illegible]

GRAD. R. R. 3
QA

TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE
ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DES COURS PROFESSIONNELS
DES CANDIDATS AUX ÉCOLES SPÉCIALES DES UNIVERSITÉS
ET A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BRUXELLES

PAR

L'ABBÉ E. GELIN

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE ET EN THÉOLOGIE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES AU COLLÈGE SAINT-QUIRIN A HUY

**Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique
adopté et spécialement recommandé
par le Conseil de perfectionnement de l'Enseignement moyen
pour les classes supérieures de la section scientifique des Athénées
et l'École militaire de Bruxelles**

SIXIÈME ÉDITION

NAMUR
LIBRAIRIE WESMAEL-CHARLIER
RUE DE FER, 53

PARIS
LIBRAIRIE VICTOR RETAUX
RUE BONAPARTE, 82

Huy, chez l'auteur, Collège Saint-Quirin

1897

Tous droits réservés

QA
103
.G317
1897

TRAITÉ

D'ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

On a marqué d'un astérisque les parties qui peuvent être omises par ceux qui ont besoin d'un cours moins étendu d'Arithmétique, et, en particulier, certaines théories plus difficiles ou moins importantes; certains renseignements qu'il y a plutôt lieu de consulter au besoin que de confier à la mémoire; enfin, certaines matières intéressantes ou utiles, mais qui ne font pas habituellement l'objet de l'enseignement.

Les candidats aux Écoles spéciales des Universités et à l'École militaire de Bruxelles, armes simples, peuvent omettre les numéros 13, 75 et 76, 111 à 115, 196, 286 à 295, 296 à 304, 331 à 370, 414 à 417, 443, 450 et 451, 454, 455 et 456, 457 à 463, 485, 600, 613, 641, 642 à 644, 645 à 647, 655 à 659.

Les candidats à l'École militaire de Bruxelles, armes spéciales, peuvent omettre les mêmes numéros, à l'exception des numéros 331 à 370.

TRAITÉ
D'ARITHMÉTIQUE
ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES DES COURS PROFESSIONNELS
DES CANDIDATS AUX ÉCOLES SPÉCIALES DES UNIVERSITÉS
ET A L'ÉCOLE MILITAIRE DE BRUXELLES

PAR

L'ABBÉ E. GELIN

DOCTEUR EN PHILOSOPHIE ET EN THÉOLOGIE
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES AU COLLÈGE SAINT-QUIRIN A HUY

**Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique
adopté et spécialement recommandé
par le Conseil de perfectionnement de l'Enseignement moyen
pour les classes supérieures de la section scientifique des Athénées
et l'École militaire de Bruxelles**

SIXIÈME ÉDITION

NAMUR
LIBRAIRIE WESMAEL-CHARLIER
RUE DE FER, 53

PARIS
LIBRAIRIE VICTOR RETAUX
RUE BONAPARTE, 82

Huy, chez l'auteur, Collège Saint-Quirin

1897

Tous droits réservés

Grad. R. R. 3
QA
103
.G317
1897

IMPRIMERIE WESMAEL-CHARLIER, RUE DE FER, 53, A NAMUR.

Math
Beman
4-4-24
10207

PRÉFACE

L'accueil bienveillant fait à notre *Traité d'Arithmétique,* depuis sa première publication en 1881, nous engage à revoir avec de nouveaux soins chaque édition nouvelle.

Voici les principaux changements qui ont été apportés à l'édition précédente :

1° Nous proposons, dans une note, une méthode nouvelle de *numération parlée,* pour la lecture des grands nombres (page **16**);

2° Nous indiquons, dans une autre note, une manière abrégée d'effectuer, *à l'aide du diviseur* 4, les additions ayant une certaine longueur (page **21**);

3° Nous exposons, d'une manière plus explicite que dans les éditions précédentes, la démonstration du théorème relatif à la *multiplication d'un nombre entier par un chiffre significatif suivi de plusieurs zéros* (**46**);

4° La longueur d'une division provient souvent des essais à faire pour reconnaître si les chiffres posés au quotient ne sont pas trop forts. Nous donnons, dans une note, une règle qui peut servir à abréger ces essais (page **47**);

5° Nous traitons, par les notations littérales, certains théorèmes qui semblent se traiter moins bien sur des nombres particuliers; savoir, le théorème relatif à la division d'un nombre par un produit de plusieurs facteurs (**80**); le théorème relatif à la multiplication ou à la division du dividende et du diviseur par un même nombre (**81**); enfin, la règle relative à l'extraction des racines d'indice composé (**110**);

6° Nous donnons une règle, qui, sans doute, deviendra classique, pour la *formation du carré des nombres* (**83**);

7° Nous énonçons, dans trois notes, quelques règles particulières pour reconnaître, *à vue,* si un nombre entier peut être un carré (page **66**), ou un cube (page **76**), ou une puissance quatrième ou cinquième parfaite (page **77**);

8° Un chapitre nouveau fait connaître divers procédés de *calcul rapide* (**116**);

9° Un autre chapitre, emprunté à la troisième édition de notre *Précis d'Arithmétique,* traite *du nombre et de la nature des opérations arithmétiques* (**117**);

10° Nous donnons, dans une note, la définition des nombres *congrus* ou *équivalents* (page **88**);

11° Nous définissons le *caractère de divisibilité,* la condition *nécessaire* et *suffisante* pour qu'un nombre entier soit divisible par un diviseur donné (**132**). Faute d'avoir fait attention à cette définition, plusieurs auteurs ont donné une théorie incomplète des caractères de divisibilité;

12° Nous signalons, dans deux notes, divers caractères de divisibilité par 4, 6, 8, 12, 15, 18, 45 (pages **92** et **96**) ;

13° Nous démontrons, d'une manière plus simple que dans les éditions précédentes, les propositions relatives à la divisibilité des nombres de la forme $a^{mn} \pm 1$ par $a^n \pm 1$ (**146**) ;

14° Nous substituons à l'expression un peu longue de *dernière somme des chiffres* d'un nombre, l'appellation plus simple de *chiffre unique* (**153**) ;

15° Nous proposons d'une manière plus générale la démonstration du théorème relatif à la suite illimitée des nombres premiers (**159**) ; et nous ajoutons à la décomposition des neuf premiers nombres de la forme $2.3.5.7... p + 1$, que nous avions déjà donnée en 1885, celle des neuf premiers nombres de la forme $2.3.5.7... p - 1$ (page **107**) ;

16° Nous démontrons ce théorème, qui n'est pas sans avoir une certaine utilité pratique : *on peut, dans la recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, remplacer l'un de ces nombres par son excès sur l'un des autres nombres* (**163**) ;

17° Nous complétons la définition de la *fraction* par ce théorème : *toute fraction est égale au quotient de son numérateur par son dénominateur* (**210**) ;

18° Nous donnons plusieurs exemples de multiplication des fractions par la *méthode des parties aliquotes* (**236**) ;

19° Nous avons entièrement refondu la théorie des *fractions décimales périodiques* (**305** à **326**). En particulier, nous démontrons les théorèmes suivants : 1° *deux fractions ordinaires égales donnent naissance à la même fraction décimale* (**307**) ; 2° *deux fractions ordinaires inégales ne peuvent donner naissance à la même fraction décimale* (**308**) ; 3° *une fraction décimale périodique, dont la période est* 9, *admet une limite* (**316**), *mais n'a pas de génératrice* (**315**) ;

20° Nous avons aussi entièrement refondu le chapitre relatif aux *nombres incommensurables* (**327**) ;

21° Nous donnons, dans deux notes, les définitions du nouveau *mètre* et du nouveau *kilogramme* adoptés par le *Comité international des Poids et Mesures*, le 29 septembre 1889 (pages **267** et **273**) ;

22° Une note fait connaître la différence qui existe entre la *tonne métrique* et le *tonneau de mer* (page **274**) ;

23° A propos de la mesure du temps, nous exposons la théorie des *fuseaux horaires* (**441**) ;

24° Nous faisons connaître les mesures complexes pour le *vin* (**444**), le *papier* (**445**) et les *objets qui se vendent au nombre* (**446**) ;

25° Nous donnons un tableau très complet des *poids, titres et valeurs au pair des monnaies de compte* des différents pays (**454**) ;

26° Nous notons la différence qui existe entre le *carat* et le *denier*, unités de poids, et le *carat* et le *denier*, unités pour exprimer le titre des matières d'or et d'argent (page **289**) ;

27° Nous donnons la nomenclature des *anciennes dénominations des mesures métriques*, telles qu'elles ont été légalement en usage

en Belgique, de 1820 à 1836 (**463**). La connaissance de ces dénominations est indispensable, par exemple, pour l'intelligence des documents relatifs au mesurage des terres, dressés durant cette époque;

28° Un chapitre nouveau traite la question de savoir *quel est le meilleur système de numération et de poids et mesures,* et résout cette question dans le sens du *système octaval* plutôt que dans le sens du *système duodécimal* (**485**);

29° Nous traitons, dans trois chapitres spéciaux, de la *méthode de réduction au même coefficient* (**507** à **513**), des *solutions rétrogrades* (**521** à **524**) et de la *méthode de fausse position* (**525** à **530**);

30° Nous justifions, par une démonstration plus facilement applicable à l'universalité des cas, la *règle conjointe,* en la rattachant à la *méthode de réduction au même coefficient* (**515**);

31° Dans le chapitre sur les partages proportionnels, nous donnons la règle à suivre pour *partager un nombre en parties à la fois directement proportionnelles à des nombres donnés et inversement proportionnelles à d'autres nombres donnés* (**539**);

32° Dans le chapitre sur les moyennes, nous traitons le cas où l'on n'accorde pas le même poids, la même autorité aux différents nombres dont on propose de trouver la *moyenne arithmétique* (**543**). De plus, nous définissons, dans une note, la *moyenne géométrique* et la *moyenne harmonique* (page **339**);

33° Dans le chapitre sur les matières d'or et d'argent, nous expliquons comment le rapport de l'or à l'argent, qui, dans le système monétaire de l'*Union latine,* est $15\frac{1}{2}$, équivaut, en mesures anglaises, à $60\frac{7}{8}$ deniers sterling d'or pour une once d'argent (**561**);

34° A propos des poids spécifiques, nous démontrons que *tout corps, pesé dans l'eau, y perd une partie de son poids, égale à l'inverse de sa densité* (**570**);

35° Le chapitre du tant pour cent ou pour mille est augmenté de deux articles, dont l'un concerne la *prime* ou la *perte* sur l'or et l'argent (**577** et **578**) et l'autre les *centimes additionnels* (**583** et **584**);

36° Nous donnons plus d'étendue à l'application de la *méthode des parties aliquotes* aux calculs d'intérêt simple (**600**);

37° Dans la théorie de l'escompte en dehors et en dedans, nous distinguons entre l'*échéance commune* et l'*échéance moyenne* (**609**); nous traitons, par l'un et l'autre escompte, le problème relatif au billet dont on retarde l'échéance (**617** et **626**); nous faisons connaître la méthode Thoyer pour le calcul rapide de la somme des escomptes d'un grand nombre de billets (**613**); nous donnons ce théorème nouveau, que *la valeur nominale d'un billet est égale au produit de ses escomptes en dehors et en dedans, divisé par leur différence* (page **381**); enfin, nous faisons ressortir les différences que présentent les solutions du problème de l'*échéance moyenne,* selon qu'il s'agit de l'escompte en dehors ou en dedans, simple ou composé (pages **375**, **380** et **382**);

38° Un chapitre nouveau fait connaître la manière d'établir, par la méthode rétrograde, les *comptes courants et d'intérêts*, le taux de l'intérêt étant ou non réciproque (**645** à **647**);

39° Comme M. L. Maingie l'a fait observer dans son rapport au Congrès des Actuaires, tenu à Bruxelles en septembre 1895, la notion d'*annuité* doit être séparée de celle de *capital;* de plus, dans le cas d'un capital à rembourser, l'annuité doit être partagée en deux parties *fixes,* l'une destinée à payer l'intérêt annuel du capital emprunté, et l'autre à reconstituer, avec les intérêts accumulés, ce même capital. Nous avons rédigé à nouveau, d'après ces idées, le chapitre des *annuités* (**648** à **652**);

40° C'est une erreur grossière, mais assez commune, de calculer l'accroissement moyen annuel de la population en divisant l'augmentation totale de plusieurs années par le nombre d'années. Il n'était donc pas inutile d'indiquer, dans un chapitre spécial, la manière de traiter les *problèmes sur la population* (**653** et **654**);

41° Dans un chapitre nouveau, nous donnons le moyen de résoudre, par l'Arithmétique, un certain nombre de *problèmes du second degré,* savoir, ceux qui se ramènent à *trouver deux nombres, connaissant leur produit, ainsi que leur somme ou leur différence, ou la somme ou la différence de leurs inverses* (**655** à **659**);

42° Enfin, dans le court supplément qui termine l'ouvrage, nous faisons connaître une méthode, souvent expéditive, pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres (**674**), et nous démontrons ce théorème : *le produit de plusieurs nombres est égal à leur plus petit commun multiple multiplié par le plus grand commun diviseur de leurs produits* n — 1 *à* n — 1 (**675**).

Nous ne doutons pas que l'on nous saura gré de ces améliorations considérables apportées à notre œuvre, et nous avons la confiance que cette nouvelle édition ne sera pas moins bien accueillie des maîtres et des élèves que les précédentes (*).

(*) Afin que l'on puisse comparer plus facilement cette édition à la précédente, nous donnons ici la liste des numéros nouveaux, ou qui ont été notablement modifiés : 12, 13, 19, 20, 30, 34, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 55, 56, 57, 72, 79, 80, 81, 83, 109, 110, 116, 117, 118, 125, 126, 128, 130, 131, 132, 134, 146, 148, 153, 154, 155, 159, 160, 163, 166, 187, 188, 194, 202, 210, 211, 214, 215, 233, 236, 242, 243, 274, 305, 307, 308, 312, 313, 315, 316, 317, 318, 320, 321, 322, 326, 327, 385, 411, 419, 420, 441, 444, 445, 446, 447, 451, 454, 455, 456, 462, 463, 485, 497, 500, 501, 504, 506, 507, 509, 510, 512, 513, 515, 517, 518, 522, 524, 525, 526, 527, 528, 530, 531, 538, 539, 540, 541, 543, 546, 549, 551, 560, 561, 562, 570, 572, 574, 575, 577, 578, 581, 583, 584, 588, 589, 600, 601, 609, 613, 617, 618, 620, 626, 627, 641, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 665, 670, 673, 674, 675.

Il y a aussi des notes nouvelles, ou qui ont été modifiées, aux pages suivantes : 12, 13, 14, 16, 18, 21, 28, 29, 31, 38, 39, 47, 54, 66, 76, 77, 84, 87, 88, 91, 92, 96, 105, 107, 109, 132, 140, 153, 154, 196, 200, 201, 203, 204, 210, 236, 241, 259, 267, 268, 273, 274, 276, 280, 284, 285, 287, 288, 289, 290, 310, 339, 355, 359, 368, 370, 374, 375, 376, 379, 380, 381, 382, 384, 386, 398.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE ÉLÉMENTAIRE

1. On appelle *grandeur* ou *quantité* tout ce qui est susceptible d'être partagé en plusieurs parties de même espèce.

Les nombres, les lignes, les surfaces, les volumes, le temps, le mouvement, la masse et le poids des corps, le prix des choses sont des quantités.

2. On donne le nom de *Mathématiques* à l'ensemble des sciences qui ont pour objet les quantités.

Les *Mathématiques* comprennent : l'*Arithmétique*, qui est la science des nombres; la *Géométrie*, qui est la science de l'étendue; la *Mécanique*, qui est la science du mouvement; enfin, l'*Algèbre* et l'*Analyse*, qui sont la science des quantités en général.

3. La notion d'*unité* est une notion simple, qui ne peut être définie.

La notion de *pluralité* résulte de trois éléments : distinction d'objets, convenance de ces objets dans une espèce commune, et réunion de ces objets distincts sous cette espèce commune, comme lorsque l'on dit : *plusieurs hommes*.

La notion de nombre ajoute un élément de plus : c'est une pluralité *déterminée*, comme lorsque l'on dit : *dix hommes*.

Le nombre ainsi conçu est le *nombre concret*, c'est-à-dire une collection déterminée d'unités d'une certaine espèce. Si l'on ne fait attention qu'à la collection elle-même, sans considérer l'espèce particulière des unités, on aura le nombre pur, ou *nombre abstrait*, comme lorsque l'on dit : *dix*.

La notion de *nombre*, d'abord appliquée aux *nombres entiers* (**7**), a ensuite été étendue aux *fractions* (**203** et **261**) et aux *nombres incommensurables* (**328**).

4. L'Arithmétique est la *science des nombres*.

Notre but, dans cet ouvrage, n'est que de donner la partie élémentaire de cette science.

5. On fait usage, dans les diverses parties des sciences mathématiques, de plusieurs termes particuliers que nous allons définir.

On appelle *axiome* une proposition évidente par elle-même.

On appelle *théorème* une proposition à démontrer.

Dans l'énoncé d'un théorème, on distingue ordinairement l'*hypothèse*, qui est une supposition que l'on fait sur un certain sujet, et la *conclusion*, qui est la conséquence de cette supposition.

La *réciproque* d'une proposition est une proposition nouvelle, dans laquelle on prend, en tout ou en partie, pour hypothèse la conclusion et pour conclusion l'hypothèse de la première, appelée proposition *directe*.

Si, dans une suite de propositions, on a fait toutes les hypothèses possibles sur un certain sujet, et que ces hypothèses aient conduit à des conclusions différentes, les réciproques de toutes ces propositions sont vraies.

Un *problème* est une question à résoudre.

Un *lemme* est une proposition préliminaire que l'on démontre, ou bien une proposition que l'on emprunte à une autre science ou à une autre partie de la science, pour la faire servir à la démonstration d'un théorème ou à la solution d'un problème.

Un *corollaire* est une proposition que l'on rattache à une proposition précédente, de laquelle on la déduit facilement.

Un *scolie* est une remarque sur une ou plusieurs propositions précédentes.

LIVRE PREMIER

LES OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS

—

CHAPITRE I

NUMÉRATION

6. La *numération* est l'*art de former, d'énoncer et d'écrire les nombres.* Elle comprend la *formation des nombres,* la *numération parlée* et la *numération écrite.*

Formation des nombres.

7. On forme les nombres en ajoutant l'unité à elle-même, puis au nombre qui en résulte, et ainsi de suite.

Les nombres ainsi formés sont appelés *entiers* ou *naturels.*

On voit :

1° Qu'à proprement parler, l'unité n'est pas un nombre, mais l'élément constitutif des nombres;

2° Que *la suite des nombres est indéfinie* ou *illimitée;*

3° Qu'il n'y a pas de nombre *infini,* c'est-à-dire qu'il n'y a pas de nombre si grand qu'il n'y en ait de plus grands encore.

Il faut observer que, par extension de langage, on donne le nom de *nombre* à l'*unité* elle-même.

Numération parlée.

8. La *numération parlée* est l'art de nommer autant de nombres que l'on veut avec un petit nombre de mots.

1° L'*unité,* ou le nombre *un,* est appelée *unité simple,* ou *unité du premier ordre.*

En ajoutant l'unité ou le nombre *un* à lui-même, puis au nombre qui en résulte, et ainsi de suite, on forme successivement les nombres *deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix.*

Le nombre *dix* est considéré comme une nouvelle unité, appelée *dizaine,* ou *unité du second ordre.*

En ajoutant cette nouvelle unité ou le nombre *dix* à lui-même, puis au nombre qui en résulte, et ainsi de suite, on obtient les nombres *deux dizaines* ou *vingt, trois dizaines* ou *trente, quatre dizaines* ou *quarante, cinq dizaines* ou *cinquante, six dizaines* ou *soixante, sept dizaines* ou *septante* ou *soixante-dix, huit dizaines* ou *octante* ou *quatre-vingts, neuf dizaines* ou *nonante* ou *quatre-vingt-dix, dix dizaines* ou *cent* (*).

Mais, entre deux nombres consécutifs de dizaines, il y a neuf nombres intermédiaires. Pour les nommer, on fait suivre chaque nombre de dizaines des noms des neuf premiers nombres, et on dit : dix, *dix et un* ou *onze, dix et deux* ou *douze, dix et trois* ou *treize, dix et quatre* ou *quatorze, dix et cinq* ou *quinze, dix et six* ou *seize, dix-sept, dix-huit, dix-neuf,* vingt, *vingt et un, vingt-deux, vingt-trois,... nonante-neuf,* cent.

On sait ainsi nommer tous les nombres depuis *un* jusqu'à *cent.*

Le nombre *cent* est aussi considéré comme une nouvelle unité, appelée *centaine,* ou *unité du troisième ordre.*

En ajoutant cette nouvelle unité ou le nombre *cent* à lui-même, puis au nombre qui en résulte, et ainsi de suite, on obtient les nombres *deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents, six cents, sept cents, huit cents, neuf cents, dix cents* ou *mille.*

Mais, entre deux nombres consécutifs de centaines, il y a nonante-neuf nombres intermédiaires. Pour les nommer, on fait suivre chaque nombre de centaines des noms des nonante-neuf premiers nombres, et on dit : cent, *cent un, cent deux, cent trois, cent quatre,... cent nonante-neuf,* deux cents, *deux cent un, deux cent deux,... neuf cent nonante-neuf,* mille.

On sait ainsi nommer tous les nombres depuis *un* jusqu'à *mille.*

(*) Les mots *septante, octante* et *nonante* sont encore usités dans le midi de la France et en Suisse. Les mots *septante* et *nonante* sont également employés en Belgique.

Les unités simples, les dizaines d'unités et les centaines d'unités forment une première classe d'unités *principales*, appelée *classe des unités simples*.

2° Le nombre *mille* est aussi considéré comme une nouvelle unité principale, et on compte par mille de la même manière que l'on a compté par unités simples, c'est-à-dire par *unités, dizaines* et *centaines de mille*, en faisant suivre chaque nombre de mille des noms des neuf cent nonante-neuf premiers nombres.

On sait ainsi nommer tous les nombres depuis *un* jusqu'à *mille mille* ou un *million*.

Les unités de mille, ou *unités du quatrième ordre*, les dizaines de mille, ou *unités du cinquième ordre*, les centaines de mille, ou *unités du sixième ordre*, forment la seconde classe d'unités principales, appelée la *classe des mille*.

3° Le *million* est, à son tour, considéré comme une nouvelle unité principale, et on compte par millions comme on a compté par unités simples et par mille, c'est-à-dire par *unités, dizaines* et *centaines de millions*, en faisant suivre chaque nombre de millions des noms des neuf cent nonante-neuf mille neuf cent nonante-neuf premiers nombres.

On sait ainsi nommer tous les nombres depuis *un* jusqu'à *mille millions* ou un *billion* ou un *milliard* (*).

Les unités de millions, ou *unités du septième ordre*, les dizaines de millions, ou *unités du huitième ordre*, les centaines de millions, ou *unités du neuvième ordre*, forment la troisième classe d'unités principales, appelée la *classe des millions*.

4° En continuant de la même manière, on arrive à nommer tous les nombres jusqu'à *mille billions*, ou un *trillion*; puis jusqu'à *mille trillions*, ou un *quatrillion*; puis jusqu'à *mille quatrillions*, ou un *quintillion*; puis jusqu'à *mille quintillions*, ou un *sextillion*; puis jusqu'à *mille sextillions*,

(*) Le mot *milliard* a été employé pour la première fois par JACQUES PELLETIER, du Mans, en 1552.

ou un *septillion;* puis jusqu'à *mille septillions,* ou un *octillion;* puis jusqu'à *mille octillions,* ou un *nonillion;* puis jusqu'à *mille nonillions,* ou un *décillion...*

9. On voit :

1° Que *dix unités d'un ordre quelconque font une unité de l'ordre immédiatement supérieur.* C'est pourquoi le système de numération qui vient d'être exposé s'appelle *décimal,* et que le nombre *dix* est dit la *base* de ce système (*);

2° Que *chaque unité principale comprend trois ordres, qui sont les unités, les dizaines et les centaines,* et que *les unités principales successives sont de mille en mille fois plus grandes.* La considération des unités principales n'est pas essentielle à la numération décimale;

3° Qu'en général, *pour nommer un nombre, il suffit d'énoncer successivement les nombres de centaines, de dizaines et d'unités de chaque unité principale, en commençant par la plus élevée.*

Numération écrite.

10. La *numération écrite* est l'art de représenter les nombres avec un petit nombre de caractères, appelés *chiffres* ou *figures.*

1° D'après ce qu'on a vu, un nombre quelconque peut être décomposé en unités d'ordres successifs, chaque ordre renfermant, au plus, neuf unités. On est donc conduit d'abord à adopter neuf caractères pour représenter les neuf premiers nombres. Ces caractères sont les chiffres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

qui représentent respectivement les nombres

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf.

(*) L'habitude de compter sur ses dix doigts est l'origine probable de la numération décimale. Toutefois, comme nous avons à chaque main quatre doigts, composés chacun de trois phalanges, et un cinquième doigt, le pouce, faisant l'office de compteur, on voit que le calcul digital s'adapte également à la ***numération tétractique, octavale*** et ***duodécimale*** (**118** et **485**).

2° Il faut aussi trouver le moyen de faire exprimer par les chiffres les différents ordres d'unités que chacun d'eux doit représenter. Or le rang que ces chiffres peuvent occuper, quand on les écrit à la suite les uns des autres, donne un moyen facile d'y parvenir.

On a donc adopté cette convention fondamentale, qu'*un chiffre, placé à la gauche d'un autre, représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur.*

D'après cette convention, dans un nombre écrit en chiffres, le premier chiffre à droite représente des unités simples; le second, des dizaines; le troisième, des centaines; le quatrième, des unités de mille; le cinquième, des dizaines de mille, et ainsi de suite.

Chaque chiffre a ainsi une valeur *absolue,* qu'il tient de sa forme particulière, et une valeur *relative,* qu'il tient du rang qu'il occupe à partir de la droite.

3° Mais il peut arriver qu'un nombre ne renferme pas d'unités d'un certain ordre. Afin donc de conserver aux chiffres de ce nombre la place qu'ils doivent occuper en vertu de la convention fondamentale, on a imaginé un dixième caractère, n'ayant aucune valeur par lui-même, mais uniquement destiné à tenir la place des unités qui manquent.

Ce caractère est le chiffre 0, que l'on appelle *zéro.*

Les autres chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sont appelés chiffres *significatifs* (*).

11. D'après ce qui précède, *pour écrire en chiffres un nombre énoncé, on écrit successivement, en allant de gauche à droite, les chiffres qui expriment les centaines, les dizaines et les unités de chaque unité principale énoncée, en remplaçant par des zéros les divers ordres d'unités qui peuvent manquer.*

(*) Le mot *chiffre* est souvent employé pour désigner le *nombre* qu'il représente. On dit, par exemple, le *chiffre* 6, pour dire le *nombre* 6.

On dit aussi, par extension de langage, le *nombre zéro,* quoique le zéro soit la négation du nombre.

Notre système de numération écrite, avec le zéro, nous est venu des Hindous par l'intermédiaire des Arabes.

Ainsi le nombre *neuf billions huit cent septante-six millions cinq cent quarante-trois mille deux cent dix* s'écrira :

9876543210.

Réciproquement, *pour énoncer un nombre écrit en chiffres, on le partage en tranches de trois chiffres, à partir de la droite, la dernière tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un ou deux chiffres; puis on énonce successivement, à partir de la gauche, les centaines, les dizaines et les unités de chaque tranche, en donnant à cette tranche le nom des unités principales qu'elle exprime.*

Ainsi le nombre

216000040008

s'énoncera : *deux cent seize billions quarante mille huit* (*).

*12. On voit : 1° que, *dans un nombre écrit en chiffres, une unité d'un ordre quelconque surpasse le nombre exprimé par les chiffres des ordres inférieurs.*

En effet, le nombre formé par le dernier ou les deux derniers ou les trois derniers... chiffres d'un nombre est, *au plus*, égal à 9 ou 99 ou 999,... et, par suite, est inférieur, d'*au moins une unité*, à 10 ou 100 ou 1000...

On voit : 2° que, *si, dans un nombre, on supprime le dernier chiffre à droite, ou les deux derniers, ou les trois derniers,... le nombre restant exprime combien de dizaines, ou de centaines, ou d'unités de mille,... il y a dans le nombre donné.*

Ainsi le nombre des dizaines du nombre 1896 est 189, le nombre des centaines est 18 et le nombre des mille est 1.

(*) On lit les nombres de 1 à 99 à l'aide de vingt-quatre mots différents. Pour les lire de 100 à 999, il faut un mot de plus, le mot *cent;* de 1000 à 999999, le mot *mille;* de 1000000 à 999999999, le mot *million*. Pour lire les nombres de plus de neuf chiffres, on peut les partager en tranches de neuf chiffres, et appeler ces tranches, à partir de la deuxième jusqu'à la onzième, *milliards, billiards, trilliards, quatrilliards, quintilliards, sextilliards, septilliards, octilliards, nonilliards, décilliards*. On peut alors, à l'aide de trente-sept mots différents, lire tous les nombres ayant moins de cent chiffres. Par exemple, le nombre

2.658455991 569831744 654692615 953842176

se lira : 2 *quatrilliards* 658 millions 455 mille 991 *trilliards* 569 millions 831 mille 744 *billiards* 654 millions 692 mille 615 *milliards* 953 millions 842 mille 176.

13. Dans la *numération romaine,* les chiffres

I, V, X, L, C, D ou IↃ, M ou CIↃ,

représentent les nombres

un, cinq, dix, cinquante, cent, cinq cents, mille.

Quand, à la droite d'un nombre, on en écrit un autre de valeur égale ou moindre, la valeur du premier est augmentée de celle du second.

Quand, à la gauche d'un chiffre, on en écrit un autre de valeur moindre, la valeur du premier est diminuée de celle du second.

On multiplie le nombre IↃ par dix, cent, mille,... en écrivant une fois, deux fois, trois fois... le signe Ↄ à sa droite.

On multiplie le nombre CIↃ par dix, cent, mille,... en écrivant une fois, deux fois, trois fois... le signe Ↄ à sa droite et le signe C à sa gauche.

On multiplie un nombre par mille, un million, un billion,... en plaçant un, deux, trois... traits au-dessus de ce nombre.

Quand le nombre M, surmonté ou non d'un ou de plusieurs traits, est précédé d'un autre nombre de valeur moindre, il est multiplié par ce nombre.

I	1	XVI	16	CCCC	400	$\overline{\text{X}}$, CCIↃↃ	10 000
II	2	XVII	17	D, IↃ	500	$\overline{\text{XX}}$	20 000
III	3	XVIII	18	DC, IↃC	600	$\overline{\text{XXX}}$	30 000
IIII, IV	4	XIX	19	DCC	700	$\overline{\text{XL}}$	40 000
V	5	XX	20	DCCC	800	$\overline{\text{L}}$, IↃↃↃ	50 000
VI	6	XXX	30	DCCCC	900	$\overline{\text{LX}}$	60 000
VII	7	XL	40	M, CIↃ	1000	$\overline{\text{LXX}}$	70 000
VIII	8	L	50	MM, $\overline{\text{II}}$	2000	$\overline{\text{LXXX}}$	80 000
IX	9	LX	60	MMM, $\overline{\text{III}}$	3000	$\overline{\text{XC}}$	90 000
X	10	LXX	70	MMMM, $\overline{\text{IIII}}$	4000	$\overline{\text{C}}$, CCCIↃↃↃ	100 000
XI	11	LXXX	80	$\overline{\text{V}}$, IↃↃ	5000	$\overline{\text{D}}$, IↃↃↃↃ	500 000
XII	12	XC	90	$\overline{\text{VI}}$	6000	$\overline{\text{M}}$, CCCCIↃↃↃↃ	1 000 000
XIII	13	C	100	$\overline{\text{VII}}$	7000	$\overline{\text{XM}}$	10 000 000
XIV	14	CC	200	$\overline{\text{VIII}}$	8000	$\overline{\text{CM}}$	100 000 000
XV	15	CCC	300	$\overline{\text{IX}}$	9000	$\overline{\text{MM}}$, $\overline{\overline{\text{M}}}$	1 000 000 000

CHAPITRE II

ADDITION

14. L'*addition des nombres entiers* est une *opération qui a pour but de former un nombre renfermant autant d'unités qu'il y en a dans plusieurs nombres entiers donnés.*

Le résultat de l'addition est appelé *somme* ou *total*, et les nombres ajoutés sont dits les *parties* ou les *termes* de cette somme.

On indique l'addition par le signe $+$, que l'on énonce *plus*, et l'égalité de deux quantités par le signe $=$, que l'on énonce *égale*.

Ainsi

$$4 + 3 = 7$$

se lit : 4 *plus* 3 *égale* 7.

Dans cette *égalité*, $4 + 3$ est le *premier membre*, et 7 le *second membre*.

On indique l'inégalité de deux quantités par les signes $>$ et $<$, que l'on énonce respectivement *plus grand que* et *plus petit que*.

Ainsi les *inégalités*

$$4 + 3 > 6, \qquad 4 + 3 < 8,$$

se lisent : 4 *plus* 3 *plus grand que* 6, 4 *plus* 3 *plus petit que* 8 (*).

15. Il suit, de la nature de l'addition :

1° Qu'*on ne peut ajouter entre eux que des nombres représentant des grandeurs de même espèce;*

2° Que *la somme est de même espèce que les nombres ajoutés;*

3° Que cependant *l'addition des nombres concrets se fait comme s'ils étaient abstraits.*

(*) Les signes $+$ et $-$ ont été employés pour la première fois par JEAN WIDMANN, en 1489; le signe $=$, par ROBERT RECORDE, en 1556; les signes $>$ et $<$, par THOMAS HARRIOT, en 1631.

16. L'addition des nombres repose sur les principes suivants :

1° *On ajoute un tout, en ajoutant successivement chacune de ses parties;*

2° *On ajoute à un tout, en ajoutant à l'une quelconque de ses parties;*

3° *On additionne plusieurs quantités, en additionnant, dans un ordre quelconque, toutes les parties de ces quantités.*

Addition de deux nombres d'un seul chiffre (*).

17. Soit proposé de faire la somme des deux nombres 8 et 5.

D'après le premier principe, il suffit d'*ajouter au nombre* 8 *chacune des unités qui composent le nombre* 5, en disant : 8 et 1 **9**, et j'ai ajouté 1; 9 et 1 **10**, et j'ai ajouté 2; 10 et 1 **11**, et j'ai ajouté 3; 11 et 1 **12**, et j'ai ajouté 4; 12 et 1 **13**, et j'ai ajouté 5 : donc **13** est la somme demandée.

Mais, s'il s'agissait d'ajouter de grands nombres, cette manière de procéder deviendrait impraticable.

Pour effectuer rapidement toute espèce d'additions, il est indispensable de savoir par cœur *toutes les sommes de deux nombres d'un seul chiffre.*

Addition de deux nombres, l'un de plusieurs chiffres et l'autre d'un seul chiffre.

18. Soit proposé de faire la somme des deux nombres 25 et 4.

Le nombre 25 étant composé de 2 dizaines et 5 unités, pour ajouter 4 unités à ce nombre, il suffit, d'après le second principe, de *les ajouter à l'une de ses parties*, ou à 5 unités. La somme se composera donc de 2 dizaines et de 5 plus 4 ou (**17**) 9 unités : cette somme est donc égale à **29**.

(*) On opère l'addition, dans le cas général, en faisant la somme des unités de chaque ordre des nombres donnés. Or cette somme revient constamment à celle de deux nombres d'un seul chiffre, ou à celle de deux nombres, l'un de deux ou plusieurs chiffres et l'autre d'un seul chiffre. Il n'y a donc lieu de distinguer que ces deux cas particuliers de l'addition.

Soit, de même, proposé de faire la somme des deux nombres 25 et 9. En raisonnant comme dans l'exemple précédent, on trouve que la somme est égale à 2 dizaines plus 14 unités, ou à 2 dizaines plus 1 dizaine plus 4 unités, ou à 3 dizaines plus 4 unités, ou à **34**.

Pour effectuer rapidement toute espèce d'additions, il importe de pouvoir énoncer immédiatement la somme de deux nombres formés l'un de plusieurs chiffres et l'autre d'un seul chiffre.

Cas général de l'addition.

19. Soit proposé de faire la somme des nombres 214, 73, 402.

```
 214
  73
 402
 ---
 689
```

Pour faire la somme de ces nombres, on peut, d'après le troisième principe, *réunir séparément leurs unités simples, leurs dizaines, leurs centaines, et réunir ensuite les sommes partielles obtenues.* On écrira donc les nombres à ajouter les uns au-dessous des autres, c'est-à-dire *de manière que leurs unités de même ordre soient dans une même colonne verticale,* et on dira (**17**) : 4 et 3 **7**, et 2 **9** (on écrit 9); 1 et 7 **8** (on écrit 8); 2 et 4 **6** (on écrit 6).

La somme cherchée est **689**.

Dans cet exemple, la somme des unités de même ordre des différents nombres est inférieure à 10; il n'en est plus ainsi dans l'exemple suivant.

20. Soit proposé de faire la somme des nombres 8296, 58, 7084, 369. Ayant écrit ces nombres les uns au-dessous des autres, on dira

```
 8296
   58
 7084
  369
 -----
 15807
```

(**17** et **18**) : 6 et 8 **14**, et 4 **18**, et 9 **27** (on écrit 7 et on *retient* 2 dizaines pour la colonne suivante); 2 et 9 **11**, et 5 **16**, et 8 **24**, et 6 **30** (on écrit 0 et on retient 3 centaines pour la colonne suivante); 3 et 2 **5**, et 3 **8** (on écrit 8); 8 et 7 **15** (on écrit 15).

La somme cherchée est **15807**.

21. On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour additionner des nombres entiers quelconques, on les écrit les uns au-dessous des autres, et on tire un trait pour séparer ces nombres de la somme à obtenir, que l'on écrira au-dessous. On fait successivement la somme des chiffres de chaque colonne, en commençant par la première à droite. Quand la somme ne surpasse pas 9, *on l'écrit telle qu'on la trouve; quand elle surpasse* 9, *on écrit seulement ses unités, et on retient les dizaines pour la colonne suivante. On continue ainsi jusqu'à la dernière colonne à gauche, au-dessous de laquelle on écrit la dernière somme telle qu'on la trouve.*

On commence l'addition par la droite, à cause de la retenue qui peut provenir de la somme partielle des unités d'un ordre quelconque, retenue qui modifie la somme des unités de l'ordre suivant.

***22.** Lorsqu'il y a beaucoup de nombres à additionner, il peut être avantageux de marquer un point pour chaque dizaine à retenir, et de reprendre ensuite ces dizaines en passant à la colonne suivante : *l'addition est ainsi constamment ramenée à celle de deux nombres d'un seul chiffre.*

Soit, par exemple, à faire la somme des nombres 7843, 6935, 4807, 5389, 3911.

7.8 4 3
6 9.3 5
4.8.0 7.
5 3 8.9.
3 9.1 1
2 8 8 8 5

On dira : 3 et 5 **8**, et 7 **15** (on marque un point pour la dizaine à retenir), 5 et 9 **14** (on marque un point pour la dizaine à retenir), 4 et 1 **5** : on écrit 5 et on reporte 2 à la colonne suivante.

2 de retenue et 4 **6**, et 3 **9**, et 8 **17** (on marque un point pour la dizaine à retenir), 7 et 1 **8** : on écrit 8 et on reporte 1 à la colonne suivante.

Et ainsi de suite.

Au lieu de marquer des points, on peut retenir sur ses doigts les dizaines à reporter (*).

(*) L'addition se fait aussi très rapidement de la manière suivante :

1° On compte le nombre de fois que 4 est contenu dans les chiffres de chaque colonne, et on multiplie ce nombre par 4;

2° On fait la somme des mêmes chiffres, diminués, comme il vient d'être dit, de 4 ou de 8;

3° On ajoute cette somme au produit par 4.

Preuve de l'addition.

23. On appelle *preuve* d'une opération une seconde opération que l'on fait pour s'assurer de l'exactitude de la première.

Il convient que la preuve soit au moins aussi facile que l'opération qu'elle est destinée à vérifier.

On conçoit, du reste, qu'il n'y a pas de preuve *absolue,* car l'opération primitive et sa preuve pourraient se trouver affectées d'erreurs équivalentes.

24. Pour faire la preuve d'une addition, on se contente de la *repasser;* ou bien on la recommence dans un ordre différent de celui qu'on a suivi d'abord, en faisant, par exemple, les sommes partielles *de bas en haut,* si on les avait faites d'abord *de haut en bas.* Si les deux opérations ont été bien faites, on doit trouver la même somme.

***25.** On peut aussi faire la preuve de l'addition de la manière suivante :

On ajoute successivement, *en commençant par la gauche,* les chiffres de chaque colonne; on retranche le total de la première colonne de la partie qui lui correspond dans la somme trouvée des nombres donnés; on écrit au-dessous le reste, auquel on joint, par la pensée, le chiffre suivant de cette même somme, et du nombre ainsi formé on retranche le total de la deuxième colonne; on continue de la sorte jusqu'à la dernière colonne, dont le total étant retranché ne doit laisser aucun reste.

Pour vérifier, par exemple, l'addition ci-contre, on dira, en commençant par la première colonne à gauche :

987	9 et 8 **17**, et 7 **24**; 24 ôtés de 25, il reste 1, qui, avec le chiffre suivant 9, fait **19**.
818	8 et 1 **9**, et 8 **17**; 17 ôtés de 19, il reste 2, qui, avec le chiffre suivant 4, fait **24**.
789	
2594	7 et 8 **15**, et 9 **24**; de 24, reste **0** : donc l'addition a été bien faite.
120	

En effet, quand d'une somme on retranche successivement toutes les parties qui la composent, il ne doit rien rester.

CHAPITRE III

SOUSTRACTION

26. La *soustraction des nombres entiers* est une *opération qui a pour but de retrancher d'un nombre entier donné autant d'unités qu'il y en a dans un autre nombre entier aussi donné.*

Le résultat de la soustraction est appelé *reste.* On dit aussi que le reste est la *différence* des deux nombres donnés, ou l'*excès* du plus grand sur le plus petit.

Les nombres donnés sont appelés les deux *termes* de la différence.

On indique la soustraction par le signe —, que l'on énonce *moins.*

Ainsi

$$7 - 3 = 4$$

se lit : 7 *moins* 3 *égale* 4.

Il est évident que le nombre dont on soustrait est la somme de celui que l'on soustrait et du reste.

La soustraction est donc l'opération *inverse* de l'addition, et on peut encore la définir : *l'opération par laquelle, connaissant la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, on cherche l'autre.*

27. Il suit, de la nature de la soustraction :

1° Que *le nombre dont on soustrait et le nombre à soustraire doivent être de même espèce ;*

2° Que *la différence de deux nombres est de même espèce que ces nombres ;*

3° Que cependant *la soustraction des nombres concrets se fait comme s'ils étaient abstraits.*

28. La soustraction des nombres repose sur les principes suivants :

1° *On retranche un tout, en retranchant successivement chacune de ses parties ;*

2° *On retranche d'un tout, en retranchant de l'une quelconque de ses parties ;*

3° *On retranche une quantité d'une autre, en retranchant, dans un ordre quelconque, toutes les parties de l'une des parties de l'autre;*

4° *La différence de deux quantités ne change pas, quand on les augmente l'une et l'autre de la même quantité.*

Cas où le nombre à soustraire et le reste n'ont qu'un seul chiffre.

29. Soit proposé de trouver la différence des nombres 11 et 5 (*).

D'après le premier principe, il suffit d'*ôter, du nombre* 11, *successivement chacune des unités qui composent le nombre* 5, en disant : 11 moins 1 **10**, et j'ai ôté 1; 10 moins 1 **9**, et j'ai ôté 2; 9 moins 1 **8**, et j'ai ôté 3; 8 moins 1 **7**, et j'ai ôté 4; 7 moins 1 **6**, et j'ai ôté 5 : donc **6** est la différence demandée.

On peut aussi, d'après la seconde définition de la soustraction, chercher quel est le nombre qu'il faut ajouter à 5 pour avoir 11, en disant : 5 et 1 **6**, et j'ai ajouté 1; 6 et 1 **7**, et j'ai ajouté 2; 7 et 1 **8**, et j'ai ajouté 3; 8 et 1 **9**, et j'ai ajouté 4; 9 et 1 **10**, et j'ai ajouté 5; 10 et 1 **11**, et j'ai ajouté 6 : donc **6** est le reste de la soustraction proposée.

Mais, si le reste devait être un grand nombre, l'une et l'autre manière de procéder deviendraient impraticables.

Quand on connaît toutes les sommes de deux nombres d'un seul chiffre, on connaît aussi les restes que l'on obtient en retranchant un nombre d'un seul chiffre d'un autre nombre qui le surpasse de moins de dix unités.

De ce que, par exemple, 6 plus 5 égale 11, on conclut immédiatement que 11 moins 5 égale **6** et que 11 moins 6 égale **5**.

Soustraction de deux nombres, lorsque aucun chiffre du plus petit ne surpasse le chiffre de même rang du plus grand.

30. Soit proposé de trouver la différence des nombres 4837 et 235.

(*) En écrivant 1 à gauche de 5, on forme le nombre 15, qui est plus grand que 11 : donc le reste est moindre que 10.

Pour avoir cette différence, on peut, d'après le troisième principe, *retrancher les unités simples du plus petit nombre des unités simples du plus grand, et, pareillement, les dizaines des dizaines, les centaines des centaines, et réunir ensuite les différences partielles obtenues.* On écrira donc le plus petit nombre sous le plus grand, et on dira : 5 de 7 **2** (on écrit 2); 3 de 3 **0** (on écrit 0); 2 de 8 **6** (on écrit 6); **4** (on écrit 4).

4837
235
4602

La différence cherchée est **4602**.

Soustraction de deux nombres, lorsque certains chiffres du plus petit surpassent les chiffres de même rang du plus grand.

31. Soit proposé de trouver la différence des nombres 806 et 539.

806
539
267

Ayant écrit le plus petit nombre sous le plus grand, on dira (**29**) : Oter 9 de 6, cela ne se peut. Pour rendre la soustraction possible, on ajoute 10 à 6, ce qui donne 16, et on dit : 9 de 16 **7** (on écrit 7).

Mais, ayant ajouté 10 unités au nombre dont on soustrait, on doit, d'après le quatrième principe, en ajouter aussi 10 au nombre que l'on soustrait, ce qui se fait en augmentant d'une unité le chiffre des dizaines de ce nombre. On dira donc : 1 et 3 **4** ; ôter 4 de 0, cela ne se peut encore. Pour rendre la soustraction possible, on ajoute 10 à 0, ce qui donne 10, et on dit : 4 de 10 **6** (on écrit 6).

Mais, ayant ajouté 10 dizaines au nombre dont on soustrait, on doit, pour ne pas altérer la différence, en ajouter aussi 10 au nombre que l'on soustrait, ce qui se fait en augmentant d'une unité le chiffre des centaines de ce nombre. On dira donc : 1 et 5 **6**, de 8 **2** (on écrit 2).

La différence cherchée est **267**.

Dans la pratique, on abrège le discours en disant : 9 de 16 **7**; 1 et 3 **4**, de 10 **6**; 1 et 5 **6**, de 8 **2**.

32. On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour avoir la différence de deux nombres entiers, on écrit le plus petit

sous le plus grand, et on tire un trait pour séparer ces nombres du reste à obtenir, que l'on écrira au-dessous. On retranche successivement, à partir de la droite, chaque chiffre du nombre inférieur du chiffre correspondant du nombre supérieur, et on écrit le reste au-dessous. Lorsqu'un chiffre du nombre inférieur surpasse le chiffre correspondant du nombre supérieur, on augmente celui-ci de dix unités de son ordre, afin de rendre la soustraction possible, et on ajoute une unité de son ordre au chiffre suivant du nombre inférieur (*).

***33.** Pour faire une soustraction, on peut s'y prendre encore de la manière suivante :

Soit à soustraire 8259 de 16093.

16093
8259
7834

Si le reste était connu, en l'ajoutant à 8259, *on obtiendrait* 16093. On dira donc : 9 et **4** (on écrit 4 en l'énonçant) 13; 1 et 5 6, et **3** (on écrit 3) 9 ; 2 et **8** (on écrit 8) 10; 1 et 8 9, et **7** (on écrit 7) 16.

Le reste cherché est **7834**.

***34.** Enfin, pour faire une soustraction, on peut encore *ajouter au plus grand nombre le complément* (**74**) *du plus petit, et diminuer la somme obtenue d'une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui des plus hautes unités du plus petit.*

Soit, par exemple, à soustraire 8259 de 16093.

On ne change pas la différence de ces nombres en ajoutant à chacun d'eux le complément 1741 du plus petit (**28**). Mais on est alors ramené à soustraire 10000 de la somme 16093 + 1741, ce qui démontre la règle.

L'emploi des compléments est utile lorsque l'on a plusieurs nombres, les uns à ajouter, les autres à soustraire. *Les compléments se prennent à vue.*

On peut aussi s'exercer à effectuer, *à la fois*, les additions et les soustractions.

(*) Au lieu d'ajouter une unité de son ordre au chiffre suivant du nombre inférieur, on peut aussi *diminuer d'une unité de son ordre le chiffre suivant du nombre supérieur.*

Addition et soustraction d'une somme ou d'une différence.

35. *On ajoute à un nombre la somme de plusieurs autres en lui ajoutant successivement chacun d'eux* (**16**).

On a, par exemple, $12 + (5 + 3) = 12 + 5 + 3$.

On met $5 + 3$ entre *parenthèses*, pour indiquer qu'il faut ajouter à 12 la somme $5 + 3$, *supposée effectuée.*

On ajoute à un nombre la différence de deux autres en lui ajoutant le premier, et en retranchant le second de la somme obtenue.

On a, par exemple, $12 + (5 - 3) = 12 + 5 - 3$.

En effet, la différence $5 - 3$ est moindre que le nombre 5 de 3 unités : donc la somme $12 + (5 - 3)$ est moindre que la somme $12 + 5$ de 3 unités, et, par suite, elle est égale à cette deuxième somme diminuée de 3 unités, on à $12 + 5 - 3$.

On retranche d'un nombre la somme de plusieurs autres en en retranchant successivement chacun d'eux (**28**).

On a, par exemple, $12 - (5 + 3) = 12 - 5 - 3$.

On retranche d'un nombre la différence de deux autres en en retranchant le premier, et en ajoutant le second à la différence obtenue.

On a, par exemple, $12 - (5 - 3) = 12 - 5 + 3$.

En effet, la différence $5 - 3$ est moindre que le nombre 5 de 3 unités : donc la différence $12 - (5 - 3)$ surpasse la différence $12 - 5$ de 3 unités, et, par suite, elle est égale à cette deuxième différence augmentée de 3 unités, ou à $12 - 5 + 3$.

Preuve de la soustraction.

36. Pour faire la preuve de la soustraction, on ajoute le reste au plus petit nombre : la somme doit être égale au plus grand nombre.

On peut encore soustraire le reste du plus grand nombre : le nouveau reste doit être égal au plus petit nombre.

CHAPITRE IV

MULTIPLICATION

37. *Multiplier un nombre entier par un autre nombre entier,* c'est *prendre le premier de ces nombres autant de fois qu'il y a d'unités dans le second* (*).

Le nombre qu'on multiplie se nomme *multiplicande,* celui par lequel on multiplie, *multiplicateur,* et le résultat de l'opération, *produit.*

Le multiplicande et le multiplicateur sont aussi appelés les *facteurs* du produit.

On indique la multiplication par le signe × ou . , que l'on énonce *multiplié par* (**). Ainsi

$$5 \times 3 = 15 \quad \text{ou} \quad 5.3 = 15$$

se lit : 5 *multiplié par* 3 *égale* 15 (***).

Dans cet exemple, 5 est le multiplicande, 3 le multiplicateur, 5 et 3 les deux facteurs, et 15 le produit.

Lorsque les nombres sont représentés par des lettres, on peut sous-entendre le signe de la multiplication.

(*) On dit souvent *répéter* au lieu de *prendre,* bien que *répéter trois fois,* par exemple, ce soit *prendre quatre fois.* On dit, de même, *trois fois plus,* pour *trois fois autant,* bien que *trois fois plus* signifie, à proprement parler, *quatre fois autant.* De même, l'expression *trois fois moins,* qui est l'inverse de *trois fois plus,* est universellement prise pour l'inverse de *trois fois autant.* Enfin on dit *trois fois plus grand* ou *plus petit,* pour *trois fois aussi grand* ou *aussi petit.* Ces inexactitudes du langage mathématique font quelquefois hésiter l'intelligence de l'enfant. Elles sont signalées dans les *Observations pour les instituteurs* qui accompagnent les *Éléments d'Arithmétique* de SARRET, ouvrage rédigé d'après le plan et les idées de CONDORCET et couronné par la Convention.

(**) Le signe × pour indiquer la multiplication a été employé la première fois par OUGHTRED, en 1631 ; le signe . est dû à LEIBNIZ.

(***) Le signe × ou . est donc *précédé du multiplicande* et *suivi du multiplicateur,* en sorte que, *par définition,* l'expression 5 × 3, ou 5 *multiplié par* 3, peut se lire encore : 3 *fois* 5, mais non 5 *fois* 3.

Ainsi le produit de a par b peut s'écrire $a \times b$, $a.b$ ou ab (*).

Lorsque le multiplicande seul est représenté par une lettre, le multiplicateur s'écrit avant le multiplicande, sans l'interposition d'aucun signe, et prend le nom de *coefficient*.

Ainsi le produit de a par 3 s'écrit $a \times 3$, ou, simplement, $3a$; 3 est le coefficient de a.

38. Il suit, de la définition de la multiplication, que cette opération n'est autre chose qu'une *addition de plusieurs nombres, tous égaux entre eux*. Chacun des nombres égaux est le *multiplicande*, et leur nombre, ou leur *quotité*, est le *multiplicateur*.

On en conclut que *le produit est de même espèce que le multiplicande*.

39. Théorème I. *On multiplie une somme par un nombre, en multipliant chaque partie de la somme par ce nombre, et en ajoutant les produits obtenus*.

Soit, par exemple, à multiplier $7 + 3$ par 8.

Multiplier la somme $7 + 3$ par le nombre 8, c'est prendre 8 fois toutes les unités contenues dans la somme $7 + 3$: c'est donc prendre 8 fois 7 unités plus 8 fois 3 unités, ce qui donne

$$(7 + 3).8 = 7.8 + 3.8.$$

On met $7 + 3$ entre *parenthèses*, pour indiquer qu'il faut multiplier par 8 la somme $7 + 3$, *supposée effectuée* (**).

On démontrerait, de même, qu'*on multiplie une différence par un nombre, en multipliant chaque terme de la différence par ce nombre, et en retranchant le second produit du premier*.

40. Théorème II. *On multiplie un nombre par une somme, en multipliant ce nombre par chaque partie de la somme, et en ajoutant les produits obtenus*.

(*) Dès 1544, Stiefel n'employait aucun signe pour indiquer le produit de deux nombres.

(**) Les *parenthèses* ont été employées pour la première fois par Albert Girard, en 1629. Au lieu de *parenthèses*, *crochets* ou *accolades*, on se sert aussi du *vinculum*, ou d'un trait que l'on place au-dessus de la quantité.

Soit, par exemple, à multiplier 8 par 7 + 3.

Multiplier le nombre 8 par la somme 7 + 3, c'est prendre 8 autant de fois qu'il y a d'unités dans la somme 7 + 3 : c'est donc prendre 8 7 fois plus 3 fois, ce qui donne

$$8.(7 + 3) = 8.7 + 8.3.$$

On démontrerait, de même, qu'*on multiplie un nombre par une différence, en multipliant ce nombre par chaque terme de la différence, et en retranchant le second produit du premier.*

41. Théorème III. *On multiplie deux sommes l'une par l'autre, en multipliant chaque partie de la première par chaque partie de la seconde, et en ajoutant les produits obtenus.*

Soit, par exemple, à multiplier 2 + 4 + 6 par 3 + 5.

On a, d'après le premier théorème,

$$(2 + 4 + 6).(3 + 5) = 2.(3 + 5) + 4.(3 + 5) + 6.(3 + 5).$$

Or, d'après le second théorème,

$$2.(3 + 5) = 2.3 + 2.5,$$
$$4.(3 + 5) = 4.3 + 4.5,$$
$$6.(3 + 5) = 6.3 + 6.5.$$

Donc

$$(2 + 4 + 6).(3 + 5) = 2.3 + 2.5 + 4.3 + 4.5 + 6.3 + 6.5.$$

42. Théorème IV. *Le produit de deux nombres ne change pas, quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

On a, par exemple, $5 \times 3 = 3 \times 5$, c'est-à-dire 3 *fois* 5 *égale* 5 *fois* 3.

En effet, formons un tableau composé de 3 lignes horizontales, de 5 unités chacune : ce tableau renfermera 3 *fois* 5 *unités*.

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

Mais ce même tableau peut être considéré comme composé de 5 lignes verticales, de 3 unités chacune : il renferme donc 5 *fois* 3 *unités*. Donc 3 *fois* 5 *égale* 5 *fois* 3.

Cas où le multiplicande et le multiplicateur n'ont qu'un seul chiffre.

43. Soit proposé de multiplier 7 par 4.

Multiplier 7 par **4**, c'est prendre le nombre 7 **4** fois, ce qui donne 7 + 7 + 7 + 7 ou **28** pour le produit demandé.

Mais, si le multiplicateur était un grand nombre, cette manière de procéder deviendrait impraticable.

Pour effectuer rapidement toute espèce de multiplications, il est indispensable de savoir par cœur *tous les produits de deux nombres d'un seul chiffre* (*).

Cas où le multiplicande a plusieurs chiffres et le multiplicateur un seul chiffre.

44. Soit proposé de multiplier 5027 par 8.

Pour multiplier 5027 par 8, il suffit, d'après le premier théorème (**39**), de *multiplier par* 8 *les unités simples, les dizaines, les centaines et les unités de mille de ce nombre, et d'ajouter les produits obtenus*. On dira donc : 8 fois 7 **56** (on écrit 6 et on retient 5); 8 fois 2 **16**, et 5 **21** (on écrit 21); 8 fois 5 **40** (on écrit 40).

$$\begin{array}{r} 5027 \\ 8 \\ \hline \mathbf{40216} \end{array}$$

Le produit cherché est **40 216.**

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour multiplier un nombre de plusieurs chiffres par un nombre d'un seul chiffre, on multiplie successivement, à partir de la droite, chaque chiffre du multiplicande par le multiplicateur. On n'écrit que le chiffre des unités de chaque produit, en retenant les dizaines, s'il y en a, pour les ajouter au produit partiel suivant; le dernier produit partiel s'écrit tel qu'on le trouve.

(*) On opère plus rapidement encore, si l'on sait par cœur tous les produits de deux nombres d'un et de deux chiffres.

HERWART DE HOHEMBURG, en 1610, CRELLE, en 1857, BREMIKER, en 1880, ont publié des tables contenant tous les produits de deux nombres de trois chiffres.

Cas où le multiplicateur a plusieurs chiffres, le multiplicande ayant un ou plusieurs chiffres (*).

45. *Pour multiplier un nombre entier par l'unité suivie de* 1, 2, 3... *zéros, il suffit d'écrire* 1, 2, 3... *zéros à la droite de ce nombre.*

On a, par exemple, 375 × 100 = **37500.**

En effet, en écrivant deux zéros à la droite du nombre 375, on fait exprimer, à chaque chiffre de ce nombre, des unités cent fois plus grandes (**12**). Chaque partie du nombre 375 devient donc cent fois plus grande, et, par suite (**39**), le nombre lui-même devient cent fois plus grand, ou est multiplié par 100.

46. *Pour multiplier un nombre entier par un chiffre suivi de* 1, 2, 3... *zéros, il suffit de multiplier le nombre par ce chiffre, et d'écrire* 1, 2, 3... *zéros à la droite du produit.*

Soit, par exemple, à multiplier 22 par 400. On multipliera 22 par 4, ce qui donne (**44**) 88, puis 88 par 100, en écrivant (**45**) deux zéros à la droite de 88, ce qui donne **8800**.

En effet, multiplier un nombre par 400, c'est le multiplier par la somme 100 + 100 + 100 + 100. Or, d'après le deuxième théorème (**40**), *on multiplie un nombre par une somme en le multipliant par chaque partie de cette somme, et en ajoutant les produits obtenus.* On multipliera donc 22 quatre fois de suite par 100, et on ajoutera les produits obtenus, ce qui donne (**45**) 2200 + 2200 + 2200 + 2200, ou 4 fois 2200. Or (**44**) 4 fois 2200 est égal à 4 fois 22 centaines, ou à 88 centaines, ou à **8800**, c'est-à-dire *au produit de* 22 *par* 4, *suivi de deux zéros.*

Ce raisonnement peut s'écrire comme il suit :

22 × 400 = 22 × (100 + 100 + 100 + 100)
= 2200 + 2200 + 2200 + 2200 (**40** et **45**)
= 2200 × 4 = **8800** (**44**).

(*) Ce cas se ramène au premier (**43**) ou au deuxième (**44**), suivant que le multiplicande a un ou plusieurs chiffres.

47. Soit maintenant proposé de multiplier 7 par 385, c'est-à-dire *un nombre d'un chiffre par un nombre de plusieurs chiffres.*

Multiplier un nombre par 385, c'est le multiplier par la somme 5 + 80 + 300. Or, d'après le deuxième théorème (**40**), *on multiplie un nombre par une somme, en le multipliant par chaque partie de cette somme, et en ajoutant les produits obtenus.* On multipliera donc 7 par 5, ce qui donne (**43**) 35; puis par 80, ce qui donne (**46**) 560; puis par 300, ce qui donne (**46**) 2100, et on fera la somme de ces produits partiels : on trouve ainsi **2695** pour le produit demandé.

7	7
385	385
35	35
560	56
2100	21
2695	**2695**

Toutefois, dans la pratique, il est plus simple d'intervertir les facteurs (**42**), c'est-à-dire de multiplier 385 par 7, ce qui ramène au deuxième cas (**44**).

48. Soit, de même, proposé de multiplier 46518 par 9037, c'est-à-dire *un nombre de plusieurs chiffres par un nombre de plusieurs chiffres.*

Multiplier un nombre par 9037, c'est le multiplier par la somme 7 + 30 + 9000. Or, d'après le deuxième théorème (**40**), *on multiplie un nombre par une somme, en le multipliant par chaque partie de cette somme, et en ajoutant les produits obtenus.* On multipliera donc 46518 par 7, ce qui donne (**44**) 325626; puis par 30, ce qui donne (**46**) 1395540; puis par 9000, ce qui donne (**46**) 418662000, et on fera la somme de ces produits partiels : on trouve ainsi **420383166** pour le produit demandé (*).

46518	46518
9037	9037
325626	325626
1395540	139554
418662000	4186620
420383166	**420383166**

(*) On opère plus rapidement, si l'on sait par cœur tous les produits de deux nombres d'un et de deux chiffres.

Ainsi, pour multiplier 46518 par 9037, on dira : 37 fois 18 **666** (on écrit 66 et on retient 6); 37 fois 65 **2405**, et 6 **2411** (on écrit 11 et on retient 24); 37 fois 4 **148**, et 24 **172** (on écrit 172); **0** (on écrit 0 dans la colonne des centaines); 9 fois 18 **162** (on écrit 62 à gauche de 0 et on retient 1); 9 fois 65 **585**, et 1 **586** (on écrit 86 et on retient 5); 9 fois 4 **36**, et 5 **41** (on écrit 41); etc.

46518
9037
1721166
4186620
420383166

Dans la pratique, on se dispense d'écrire les zéros qui se trouvent à droite des produits partiels; mais on a soin d'écrire le premier chiffre de chaque produit dans la même colonne que celui qui sert de multiplicateur.

49. On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour multiplier un nombre d'un ou plusieurs chiffres par un nombre de plusieurs chiffres, on écrit le multiplicateur sous le multiplicande, et on tire un trait pour séparer ces nombres des produits partiels, que l'on écrira au-dessous.

On multiplie le multiplicande successivement par chaque chiffre significatif du multiplicateur, en écrivant chaque produit de manière que son premier chiffre à droite soit dans la même colonne que celui qui sert de multiplicateur; puis on fait la somme de tous ces produits partiels et on a le produit demandé.

On commence la multiplication par la droite du multiplicande, à cause de la retenue qui peut provenir d'un produit partiel quelconque; mais il n'est pas indispensable de la commencer par la droite du multiplicateur.

50. *Lorsque les deux facteurs sont terminés l'un ou l'autre ou tous les deux par des zéros, on peut les multiplier sans avoir égard aux zéros, sauf à écrire à la droite du produit autant de zéros qu'on en a supprimé.*

Cela revient à supprimer, à la droite du premier produit partiel, autant de zéros qu'il y en a à la droite du multiplicande et du multiplicateur, et, à la droite des produits partiels suivants, autant de zéros qu'il y en a à la droite du multiplicande.

51. Lorsque le multiplicateur a un grand nombre de figures, ou lorsqu'on doit faire le produit du même multiplicande par plusieurs nombres, il peut être avantageux de former d'abord les produits du multiplicande par les neuf premiers nombres.

Pour former ces produits, on ajoute le multiplicande à lui-même, puis à la somme obtenue, et ainsi de suite. On ajoute encore le multiplicande à son produit par 9, et on retrouve ce même multiplicande suivi de zéro (**45**), ce qui vérifie les additions précédentes (**72**).

***52.** Théorème V. *Le produit de deux nombres a autant de chiffres qu'il y en a dans les deux facteurs, ou autant moins un.*

Supposons que le multiplicande ait cinq chiffres, et le multiplicateur quatre chiffres.

Puisque le multiplicateur a quatre chiffres, il est au moins égal à 1000, et il est moindre que 10000. Le produit est donc (**45**) au moins égal au multiplicande suivi de trois zéros, et il est moindre que le multiplicande suivi de quatre zéros. Par conséquent, le nombre des chiffres du produit est au moins $5 + 3$, et au plus $5 + 4$.

Preuve de la multiplication.

53. Pour faire la preuve de la multiplication, on la recommence en intervertissant l'ordre des facteurs (**42**).

On peut aussi multiplier ou diviser l'un des facteurs par un certain nombre, et diviser ou multiplier le nouveau produit par le même nombre (**60** et **79**).

Des produits de plusieurs facteurs.

54. On appelle *produit de plusieurs nombres* le résultat que l'on obtient en multipliant le premier nombre par le second, le produit obtenu par le troisième, le nouveau produit obtenu par le quatrième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé tous les nombres.

Ainsi le produit des nombres 3, 4, 5, 6 est le résultat que l'on obtient en multipliant 3 par 4, le produit obtenu par 5, et le nouveau produit obtenu par 6. On l'indique par la notation

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 \qquad \text{ou} \qquad 3 . 4 . 5 . 6,$$

qu'on lit ainsi : 3 *multiplié par* 4 *multiplié par* 5 *multiplié par* 6.

Les multiplicandes sont successivement 3, 3 . 4, 3 . 4 . 5, et les multiplicateurs sont respectivement 4, 5, 6, en sorte que l'on a, par définition,

$$3 \times 4 \times 5 \times 6 = [(3 \times 4) \times 5] \times 6.$$

Chacun des nombres 3, 4, 5, 6 est appelé *facteur* du produit, lequel est de même espèce que le multiplicande 3.

55. Théorème VI. *Dans un produit de plusieurs nombres, on peut intervertir d'une manière quelconque l'ordre des facteurs.*

Soit le produit $7 \times 5 \times 3 \times 8 \times 6 \times 4$.

1° *On peut intervertir l'ordre des deux premiers facteurs.*

En effet, d'après un théorème que l'on a vu précédemment (**42**), le produit 7×5 est égal au produit 5×7 : par conséquent, au lieu de multiplier le premier produit successivement par 3, 8, 6, 4, on peut multiplier le deuxième successivement par les mêmes nombres, ce qui donne

$$7 \times 5 \times 3 \times 8 \times 6 \times 4 = 5 \times 7 \times 3 \times 8 \times 6 \times 4.$$

2° *On peut intervertir l'ordre des deux derniers facteurs.*

P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P
P	P	P	P	P	P

En effet, appelons P le produit $7 \times 5 \times 3 \times 8$, et formons un tableau composé de 4 lignes horizontales, dont chacune renferme P 6 fois : le nombre total d'unités de chaque ligne est $P \times 6$, et le nombre total d'unités du tableau est $\mathbf{P \times 6 \times 4}$. Mais ce même tableau peut être considéré comme composé de 6 lignes verticales, dont chacune renferme P 4 fois : le nombre total d'unités de chaque ligne est $P \times 4$, et le nombre total d'unités du tableau est $\mathbf{P \times 4 \times 6}$. On a donc

$$P \times 6 \times 4 = P \times 4 \times 6,$$

ou, en remplaçant P par $7 \times 5 \times 3 \times 8$,

$$7 \times 5 \times 3 \times 8 \times 6 \times 4 = 7 \times 5 \times 3 \times 8 \times 4 \times 6.$$

3° *On peut intervertir l'ordre de deux facteurs consécutifs quelconques,* 5 et 3, par exemple.

En effet, d'après ce qu'on vient de voir, le produit $7 \times 5 \times 3$ est égal au produit $7 \times 3 \times 5$: par conséquent, au lieu de multiplier le premier produit successivement par 8, 6, 4, on peut multiplier le deuxième successivement par les mêmes nombres, ce qui donne

$$7 \times 5 \times 3 \times 8 \times 6 \times 4 = 7 \times 3 \times 5 \times 8 \times 6 \times 4.$$

Il résulte, de ce qui précède, qu'*on peut donner à un facteur quelconque une place quelconque*, puisqu'on peut le faire avancer, successivement, de 1, 2, 3... rangs vers la droite ou vers la gauche : c'est ce qu'il fallait démontrer.

56. Théorème VII. *On multiplie un nombre par un produit de plusieurs facteurs, en le multipliant successivement par les facteurs de ce produit,* c'est-à-dire en le multipliant d'abord par le premier facteur, puis le produit obtenu par le deuxième facteur, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé tous les facteurs.

On a, par exemple,

$$a \times (b \times c \times d) = a \times b \times c \times d.$$

En effet, on peut, dans le produit $a \times (b \times c \times d)$, intervertir l'ordre des deux facteurs (**42**), ce qui donne $(b \times c \times d) \times a$, ou (**54**) $b \times c \times d \times a$; et on peut, dans ce dernier produit, mettre le facteur a à la première place (**55**), ce qui donne $a \times b \times c \times d$.

57. Théorème VIII. *On multiplie un produit par un produit en formant un produit unique composé de tous les facteurs des deux produits donnés.*

On a, par exemple,

$$(a \times b \times c) \times (d \times e) = a \times b \times c \times d \times e.$$

En effet, d'après le théorème précédent, le produit de $a \times b \times c$ par $d \times e$ est égal à $(a \times b \times c) \times d \times e$, et ce dernier produit peut s'écrire (**54**) $a \times b \times c \times d \times e$.

58. Théorème IX. *On peut, dans un produit de plusieurs nombres, remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué.*

La proposition est évidente, si les facteurs dont il s'agit sont les premiers (**54**). Or on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi (**55**). Donc la proposition est démontrée.

Ainsi, dans le produit $4 \times 9 \times 7 \times 25$, on peut remplacer les facteurs 4 et 25 par leur produit effectué, qui est 100, le facteur 100 pouvant, d'ailleurs, être écrit à un rang quelconque.

59. Théorème X. Réciproquement, *on peut, dans un produit de plusieurs nombres, remplacer un facteur quelconque par d'autres dont ce facteur est le produit.*

La proposition est évidente, si le facteur dont il s'agit est le premier (**54**). Or on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi (**55**). Donc la proposition est démontrée.

Ainsi, dans le produit $4 \times 30 \times 7$, on peut remplacer le facteur 30 par les facteurs 2, 3, 5, dont 30 est le produit, les facteurs 2, 3, 5 pouvant, d'ailleurs, être écrits à un rang quelconque.

60. Théorème XI. *Quand on multiplie l'un des facteurs d'un produit par un nombre, le produit est multiplié par ce nombre.*

Si, par exemple, on multiplie par 8 l'un des facteurs du produit $5 \times 6 \times 7$, le produit lui-même sera multiplié par 8.

En effet, pour multiplier par 8 le produit $5 \times 6 \times 7$, il suffit d'écrire $5 \times 6 \times 7 \times 8$ (**54**). Or, dans ce dernier produit, on peut remplacer le facteur 8 et l'un quelconque des autres facteurs par leur produit effectué (**58**). Donc, pour multiplier un produit par un nombre, il suffit de multiplier l'un des facteurs du produit par ce nombre.

CHAPITRE V

DIVISION

61. *Diviser un nombre entier par un autre nombre entier,* c'est *partager le premier en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le second;* ou bien, c'est *chercher combien le premier contient de fois le second.*

Le nombre qu'on divise se nomme *dividende,* celui par lequel on divise, *diviseur*, et le résultat de l'opération, *quotient.*

On indique la division par le signe :, que l'on énonce *divisé par* (*).

Ainsi $36 : 9 = 4$ se lit : 36 *divisé par* 9 *égale* 4.

(*) Le signe :, employé pour indiquer la division, est dû à Leibniz.

62. Il importe de considérer attentivement les deux cas bien distincts que peut offrir la division.

Supposons, en premier lieu, qu'il s'agisse de *partager le nombre* 36 *en* 9 *parties égales* (*).

Ici le nombre 36 est un tout composé de 9 parties égales, de grandeur inconnue. Si la grandeur de chaque partie était connue, il est évident qu'en la prenant 9 fois on retrouverait 36. En d'autres termes, *en multipliant le quotient par le diviseur, on doit reproduire le dividende.*

Ainsi, dans le premier cas de la division, le *dividende* est un *produit* dont le *diviseur* donné est le *multiplicateur,* et le quotient cherché, le *multiplicande.*

Par suite, lorsqu'on opère sur des nombres concrets, *le quotient est un nombre de même espèce que le dividende.*

Supposons, en second lieu, qu'il s'agisse de *trouver combien de fois le nombre* 36 *contient le nombre* 9 (**).

Ici le nombre 36 est un tout composé d'un nombre inconnu de parties, toutes égales à 9. Si le nombre de ces parties était connu, il est évident qu'en prenant chaque partie autant de fois que l'indiquerait ce nombre, on retrouverait 36. En d'autres termes, *en multipliant le diviseur par le quotient, on doit reproduire le dividende.*

Ainsi, dans le second cas de la division, le *dividende* est un *produit* dont le *diviseur* donné est le *multiplicande,* et le *quotient* cherché, le *multiplicateur.*

Par suite, lorsqu'on opère sur des nombres concrets, *le dividende et le diviseur sont deux nombres de même espèce* (***).

(*) Cette opération résout, par exemple, le problème suivant : *On a payé* 36 *francs pour* 9 *mètres de drap : quel est le prix du mètre?* En effet, si 9m coûtent 36f, un mètre coûte 9 fois moins, ou *la neuvième partie de* 36f.

(**) Cette opération résout, par exemple, le problème suivant : *Si le mètre de drap coûte* 9 *francs, combien aura-t-on de mètres pour* 36 *francs?* En effet, si le mètre coûte 9f, pour 36f on aura *autant de mètres que* 9f *sont contenus de fois dans* 36f.

(***) A proprement parler, les mots *dividende, diviseur, division* s'appliquent au premier cas de la division et le mot *quotient* au second cas.

63. Il suit de ce qui précède que la division est l'opération *inverse* de la multiplication.

On peut donc encore définir la *division : l'opération par laquelle, connaissant le produit de deux nombres et l'un de ces nombres, on cherche l'autre.*

Le *produit* donné est le *dividende,* le *facteur connu,* le *diviseur,* et le *facteur cherché,* le *quotient.*

64. La nouvelle définition permet de ramener à un seul les deux cas de la division. On a vu, en effet, que, sans changer le produit de deux nombres, on peut prendre indifféremment celui des deux nombres que l'on veut pour multiplicande et l'autre pour multiplicateur. Par suite, on peut toujours, dans la division de deux nombres, considérer le diviseur donné comme étant le multiplicande, et le quotient cherché comme étant le multiplicateur du produit donné, qui est le dividende.

D'après cela, *diviser* sera toujours *chercher combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende.*

En ramenant ainsi le premier cas de la division au second, on change, il est vrai, le sens même de l'opération; mais, ce qui est la seule chose que l'on a en vue ici, *on ne change pas la valeur du quotient cherché.*

On peut arriver à la même conclusion par la considération directe du premier cas de la division.

En effet, soit encore à *partager le nombre* 36 *en* 9 *parties égales.*

Si c'était le nombre 9 que l'on eût à partager en 9 parties égales, il est évident que chaque partie serait égale à l'unité. Mais c'est le nombre 36 que l'on doit partager en 9 parties égales; chaque partie contiendra donc autant d'unités que 9 est contenu de fois dans 36.

On voit que l'on est ramené à chercher combien de fois 9 est contenu dans 36, ce qui est le second cas de la division.

65. Dans l'exemple traité, il existe un nombre entier 4, tel que le produit de ce nombre 4 et du diviseur 9 soit égal au dividende 36. Mais on conçoit qu'il n'en est pas généralement ainsi, et il reste à voir quel est, dans ce cas, le sens de la division.

Soit proposé, par exemple, de diviser 42 par 9.

S'il s'agit de trouver *la neuvième partie de* 42, on remarquera que ce nombre 42 est égal à 9 *fois* 4, *plus* 6, et qu'il est moindre que 9 fois 5.

S'il s'agit de trouver *combien de fois* 9 *est contenu dans* 42, on remarquera, de même, que ce nombre 42 est égal à 4 *fois* 9, *plus* 6, et qu'il est moindre que 5 fois 9.

On dit, dans les deux cas, que 4 est le *quotient entier* de la division de 42 par 9, et que le nombre 6, moindre que le diviseur 9, est le *reste* de la division.

On voit que *le dividende est égal au produit du diviseur et du quotient entier, plus le reste.*

On voit aussi qu'il est indifférent, *quant à la valeur de ce quotient et de ce reste*, de considérer la division sous le premier ou sous le second point de vue.

Nombre des chiffres du quotient.

66. Théorème I. *Le nombre des chiffres du quotient entier de deux nombres est égal au nombre de zéros qu'il est nécessaire d'écrire à la droite du diviseur pour avoir un nombre supérieur au dividende.*

Soit, par exemple, à diviser 98725 par 64.

Si l'on écrit un, puis deux, puis trois zéros à la droite du diviseur, on obtient les nombres 640, 6400, 64000, tous moindres que le dividende. Si l'on écrit quatre zéros à la droite du diviseur, on obtient le nombre 640000, qui est plus grand que le dividende. Le dividende est donc plus grand que 1000 fois et moindre que 10000 fois le diviseur. On en conclut que le quotient entier est compris entre 1000 et 10000, et, par suite, que ce quotient a quatre chiffres, ce qui démontre la proposition (*).

(*) La théorie des divers cas de la division repose sur les principes suivants :

1° *Le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient entier, plus le reste* (**65**);

2° *Le nombre des chiffres du quotient entier de deux nombres est égal au nombre de zéros qu'il est nécessaire d'écrire à la droite du diviseur pour avoir un nombre supérieur au dividende* (**66**).

Cas où le diviseur et le quotient n'ont qu'un seul chiffre.

67. Soit à diviser 27 par 6.

En écrivant un zéro à la droite du diviseur, on forme le nombre 60, qui est plus grand que le dividende : donc (**66**) le quotient n'a qu'un chiffre.

Pour trouver ce quotient, ou pour savoir combien de fois 6 est contenu dans 27, il suffit de voir combien de fois 6 peut être retranché de 27. On dira donc :

27 moins 6 **21**, 21 moins 6 **15**, 15 moins 6 **9**, 9 moins 6 **3**...

Ainsi 6 peut être retranché de 27 **4** fois, et il reste **3**, nombre inférieur à 6 : donc **4** est le quotient entier de 27 par 6, et **3** est le reste de la division.

On peut aussi, d'après la deuxième définition de la division, chercher par quel nombre il faut multiplier 6 pour avoir 27. On dira donc :

1 fois 6 **6**, 2 fois 6 **12**, 3 fois 6 **18**, 4 fois 6 **24**, 5 fois 6 **30**...

Ainsi 27 est compris entre **4** fois 6 et **5** fois 6 : donc **4** est le quotient entier de la division de 27 par 6, et 27 moins 24 ou **3** est le reste de la division.

Mais, si le quotient était un grand nombre, l'une et l'autre manière de procéder seraient impraticables.

Quand on connaît tous les produits de deux nombres d'un seul chiffre, on connaît aussi les quotients qu'on obtient en divisant par un nombre d'un seul chiffre tout autre nombre qui n'est pas dix fois plus grand.

Cas où le diviseur a plusieurs chiffres et le quotient un seul chiffre.

68. Soit à diviser 6483 par 952.

En écrivant un zéro à la droite du diviseur, on forme le nombre 9520, qui est plus grand que le dividende : donc (**66**) le quotient n'a qu'un chiffre.

Pour trouver ce chiffre, rappelons-nous que *le dividende est le produit du diviseur par le quotient entier, plus le reste, s'il y en a un.*

Dans l'exemple proposé, le dividende 6483 se compose des produits partiels des 9 centaines, 5 dizaines et 2 unités du diviseur par le chiffre inconnu du quotient, plus un reste inférieur au diviseur, s'il y a lieu. Le premier de ces produits partiels, ou celui des 9 centaines du diviseur par le quotient, est un certain nombre de centaines, lesquelles sont nécessairement contenues dans les 64 centaines du dividende. Si donc ces 64 centaines du dividende ne contenaient que ce produit, en divisant 64 centaines par 9 centaines, on aurait le quotient cherché. Mais, dans ces 64 centaines, il peut y avoir aussi des centaines provenant de la somme des deux autres produits partiels et du reste. Par conséquent, *en divisant les 64 centaines du dividende par les 9 centaines du diviseur, on aura le quotient cherché ou un nombre trop grand.*

6483	952
6664	7

En divisant 64 centaines par 9 centaines, ou 64 par 9, on a 7 pour quotient entier (**67**).

Pour essayer ce chiffre, on multiplie le diviseur 952 par 7. Le produit est 6664, nombre supérieur au dividende : donc le chiffre 7 est trop fort, et il faut essayer le chiffre immédiatement inférieur, qui est 6.

6483	952
5712	**6**
771	

Pour essayer le chiffre 6, on multiplie encore 952 par 6. Le produit est 5712, nombre inférieur au dividende : donc **6** est le quotient cherché.

Le reste de la division égale 6483 moins 5712 ou **771**.

On déduit, du raisonnement qui précède, la règle suivante :

Pour faire la division de deux nombres de plusieurs chiffres, dans le cas où le quotient ne doit avoir qu'un chiffre, on divise, par le premier chiffre à gauche du diviseur, le nombre formé par la partie de même ordre du dividende. On multiplie le diviseur par le chiffre obtenu, et, si le produit peut être soustrait du dividende, ce chiffre est le quotient cherché. Sinon, on le diminue d'une unité, et on essaie le nouveau chiffre. On continue de la sorte jusqu'à ce que l'on obtienne un produit qui puisse être soustrait du dividende : le dernier chiffre essayé est le quotient cherché.

Dans la pratique, les essais se font à vue, sans rien écrire.

De plus, pour essayer un chiffre, il n'est pas ordinairement nécessaire de multiplier tout le diviseur par ce chiffre. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, il suffit de multiplier les 95 dizaines du diviseur par 7, pour s'assurer que ce chiffre est trop fort.

Enfin, quand on a trouvé le véritable chiffre du quotient, on peut faire simultanément la multiplication et la soustraction en disant : 6 fois 2 **12**, de 13 reste **1** (on écrit 1 et on retient 1); 6 fois 5 **30**, et 1 **31**, de 38 reste **7** (on écrit 7 et on retient 3); 6 fois 9 **54**, et 3 **57**, de 64 reste **7** (on écrit 7) (*).

6483	952
771	**6**

Cas où le quotient a plusieurs chiffres, le diviseur ayant un ou plusieurs chiffres (**).

69. Soit à diviser 40625 par 7.

Le dividende étant plus grand que 7000, mais moindre que 70000, le quotient cherché a quatre chiffres (**66**), et, par suite, renferme des unités de mille, des centaines, des dizaines et des unités simples.

Le dividende 40625 se compose donc des produits partiels du diviseur 7 par les unités de mille, centaines, dizaines et unités simples du quotient, plus un reste inférieur à 7, s'il y a lieu.

Or le produit du diviseur 7 par le chiffre des mille du quotient est un certain nombre de mille. De plus, la partie à droite du chiffre des mille du quotient formant un nombre au plus égal à 999, le produit de 7 par

---

(*) Nous ne croyons pas devoir conseiller, en général, cette dernière disposition.

« Je suis loin, dit M. MAILLY, de vouloir déprécier le calcul mental, qui se fait par un effort de mémoire; je pense qu'il est très utile d'apprendre à calculer de tête, parce qu'on n'a pas toujours sous la main du papier ou une ardoise; mais j'ai acquis la conviction que, lorsqu'on opère avec la plume ou avec la craie, il est éminemment avantageux d'écrire sinon toutes, du moins presque toutes les opérations que l'on fait : on opère plus sûrement, on éprouve moins de fatigue, et, en définitive, on va plus vite. Le grand art du calculateur consiste à opérer mécaniquement et de façon que l'esprit ait la moindre part possible au travail... » (*Principes de la science du calcul*, page 22.)

(**) Ce cas se ramène au premier (**67**) ou au deuxième (**68**), suivant que le diviseur a un ou plusieurs chiffres.

cette partie du quotient est au plus égal à 999 fois 7, et, si on lui ajoute le reste, qui est moindre que 7, la somme sera moindre que 999 fois 7 plus 1 fois 7, ou que 1000 fois 7, ou que 7 mille.

Il s'ensuit que les 40 mille du dividende contiennent le produit du diviseur 7 par le chiffre des mille du quotient, plus, s'il y a lieu, un autre nombre de mille, *lequel est nécessairement inférieur à* 7 : par conséquent, *si l'on divise le nombre* 40 *des mille du dividende par* 7, *le quotient entier sera le chiffre exact des unités de mille du quotient.*

Le quotient entier de 40 par 7 est 5 (**67**) : donc **5** est le chiffre des mille du quotient.

```
40625 | 7          40625 | 7          40625 | 7
35    |-------     56    |-------        4  |-------
----  | 5803         25  | 5803             | 5803
 56                   4
 56
 ---
  25
  21
  ---
   4
```

Si, des 40 mille du dividende 40625, on retranche le produit 35 mille du diviseur 7 par le chiffre 5 des mille du quotient, il reste 5 mille, lesquels, joints à la partie restante 625 du dividende, forment le nombre 5625. Ce nombre 5625 renferme le produit du diviseur 7 par les centaines, dizaines et unités simples du quotient, plus le reste, s'il y en a un. On considèrera donc 5625 comme un nouveau dividende, sur lequel on raisonnera comme on l'a fait sur le dividende primitif 40625, et ainsi de suite.

On remarquera qu'il n'est pas nécessaire de former les dividendes *complets* successifs, mais seulement les dividendes *partiels*, en *abaissant*, à la droite du dernier chiffre de chaque reste, le chiffre du dividende total qui représente les unités de l'ordre immédiatement inférieur.

On peut aussi se dispenser d'écrire les produits partiels. On peut même n'écrire que les chiffres du quotient et le reste.

Quelle que soit la disposition adoptée, on dira : 7 en 40 **5** fois (on écrit

5 au quotient); 5 fois 7 **35**, de 40 reste **5**; 7 en 56 **8** fois (on écrit 8 au quotient, à droite de 5); 8 fois 7 **56**, de 56 reste **0**; 7 en 2 **0** fois (on écrit 0 au quotient, à droite de 8); 7 en 25 **3** fois (on écrit 3 au quotient, à droite de 0); 3 fois 7 **21**, de 25 reste **4**.

Le quotient cherché est **5803** et le reste **4**.

70. Soit encore à diviser 33554432 par 1024.

On trouve facilement (**66**) que le quotient a cinq chiffres, et, par suite, que le dividende 33554432 se compose des produits partiels du diviseur 1024 par les dizaines de mille, unités de mille, centaines, dizaines et unités simples du quotient, plus un reste inférieur à 1024, s'il y a lieu.

Or le produit du diviseur 1024 par le chiffre des dizaines de mille du quotient est un certain nombre de dizaines de mille. De plus, le produit de 1024 par la partie à droite du chiffre des dizaines de mille du quotient est, au plus, égal à 9999 fois 1024, et, si on lui ajoute le reste, qui est moindre que 1024, la somme sera moindre que 10000 fois 1024, ou que 1024 dizaines de mille.

Il s'ensuit que les 3355 dizaines de mille du dividende contiennent le produit du diviseur 1024 par le chiffre des dizaines de mille du quotient, plus, s'il y a lieu, un autre nombre de dizaines de mille, *lequel est nécessairement inférieur à* 1024 : par conséquent, *si l'on divise le nombre*

33554432	1024
3072	**32768**
2834	
2048	
7864	
7168	
6963	
6144	
8192	
8192	
0	

33554432	1024
2834	**32768**
7864	
6963	
8192	
0	

3555 *des dizaines de mille du dividende par* 1024, *le quotient entier sera le chiffre exact des dizaines de mille du quotient.*

Le quotient entier de 3355 par 1024 est 3 (**68**) : donc **3** est le chiffre des dizaines de mille du quotient.

Si, du dividende total 33554432, on retranche le produit du diviseur 1024 par le chiffre 3 des dizaines de mille du quotient, on obtient un reste 2834432, sur lequel on raisonnera comme on l'a fait sur le dividende primitif, et ainsi de suite.

Le quotient cherché est **32768** et le reste est nul.

71. On déduit, des deux exemples qui précèdent, la règle suivante :

Pour faire la division de deux nombres, dans le cas où le quotient a plusieurs chiffres, on écrit le diviseur à la droite du dividende ; on sépare ces deux nombres par un trait vertical, et on tire un autre trait pour séparer le diviseur du quotient à obtenir, que l'on écrira au-dessous.

On sépare, sur la gauche du dividende, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour avoir un nombre qui contienne le diviseur. On divise ce nombre par le diviseur et on écrit le chiffre obtenu au quotient.

On soustrait, du nombre séparé sur la gauche du dividende, le produit du diviseur par ce premier chiffre du quotient, et on abaisse à droite du reste le chiffre suivant du dividende. On divise encore ce nouveau nombre par le diviseur, et on obtient le second chiffre du quotient, que l'on écrit à la droite du premier.

On continue ainsi jusqu'à ce que l'on ait déterminé tous les chiffres du quotient.

Lorsqu'un dividende partiel est moindre que le diviseur, on écrit 0 *au quotient ; puis, ayant abaissé un nouveau chiffre du dividende, on continue l'opération comme il a été dit* (*).

(*) Si, pour vérifier un chiffre posé au quotient, on le multiplie par le premier chiffre à gauche du diviseur, ou par les deux premiers, ou par les trois premiers, etc., et que l'on retranche le produit de la partie correspondante du dividende, le chiffre essayé est exact dans les cas suivants :

1° Lorsque le reste est égal ou supérieur au chiffre que l'on essaie ;

2° Lorsque le reste est supérieur au chiffre suivant du diviseur.

72. Lorsque le quotient doit avoir un grand nombre de figures, ou lorsqu'on doit diviser plusieurs nombres par un même diviseur, il peut être avantageux de former d'abord les produits du diviseur par les neuf premiers nombres (**51**), comme on le voit dans l'exemple ci-dessous :

```
79228162514264337593543950336 | 281474976710656
56294995342131 2 . . . 2      |-----------------
-----------------------------  | 281474976710656
22933167172133 13
22517998136852 48 . . . 8
-----------------------------
  415169035280657
  281474976710656 . . . 1
  -----------------------------
  133694058570001 5
  112589990684262 4 . . . 4
  -----------------------------
   21104067885739 19
   19703248369745 92 . . . 7
   -----------------------------
    1400819515993273
    1125899906842624 . . . 4
    -----------------------------
     274919609150649 5
     253327479039590 4 . . . 9
     -----------------------------
      21592130111059 14
      19703248369745 92 . . . 7
      -----------------------------
       1888881741313223
       1688849860263936 . . . 6
       -----------------------------
        200031881049287 9
        197032483697459 2 . . . 7
        -----------------------------
         2999397351828 75
         2814749767106 56 . . . 1
         -----------------------------
          184647584722190 3
          168884986026393 6 . . . 06
          -----------------------------
           15762598695796 73
           14073748835532 80 . . . 5
           -----------------------------
            1688849860263936
            1688849860263936 . . . 6
            -----------------------------
                   0
```

1	281474976710656
2	562949953421312
3	844424930131968
4	1125899906842624
5	1407374883553280
6	1688849860263936
7	1970324836974592
8	2251799813685248
9	2533274790395904
10	2814749767106560

73. *Lorsque le diviseur est terminé par des zéros, on les néglige, et on sépare un nombre égal de chiffres sur la droite du dividende ; on divise les nouveaux nombres, et on écrit, à la droite du reste, les chiffres supprimés au dividende : le quotient obtenu et le reste ainsi formé sont le quotient et le reste de la division des nombres proposés.*

Car cela revient à supprimer, à la droite de chaque produit partiel, autant de zéros qu'il y en a au diviseur, et à supprimer un nombre égal de chiffres à la droite de chaque reste.

Soit, par exemple, à diviser 7328956 par 64000. On divise 7328 par 64 : le quotient entier est 114 et le reste 32. On en conclut que le quotient entier de 7328956 par 64000 est aussi 114 et le reste 32956.

7328956	64000	7328.956	64.000
64000	**114**	64	**114**
92895		92	
64000		64	
288956		288	
256000		256	
32956		**32956**	

Méthode des compléments.

74. On appelle *complément d'un nombre ce qu'il faut ajouter à ce nombre pour avoir une unité de l'ordre immédiatement supérieur à celui de ses plus hautes unités.*

Ainsi le complément de 3857 est ce qu'il faut ajouter à 3857 pour avoir 10000.

Pour former le complément d'un nombre, on soustrait de 9 *chacun de ses chiffres et de* 10 *son premier chiffre significatif à droite.*

Ainsi, pour former le complément de 3857, on dit : 3 de 9 **6**, 8 de 9 **1**, 5 de 9 **4**, 7 de 10 **3** : le complément de 3857 est **6143.**

En effet, la somme des nombres 3857 et 6143 est égale à 9 mille + 9 centaines + 9 dizaines + 10 unités, ou à 10000.

75. Théorème II. *Lorsqu'on ajoute au dividende le produit du quotient par le complément du diviseur, la somme est égale au reste précédé du quotient.*

Il est entendu que l'on donne au reste autant de chiffres qu'au diviseur, en écrivant, s'il y a lieu, un ou plusieurs zéros à sa gauche.

			158
6749	842	6749	842
6736	**8**	1264	**8**
013		**8**013	

Ainsi, le quotient de 6749 par 842 étant 8 et le reste 013, si l'on multiplie ce quotient 8 par le complément 158 du diviseur, et qu'on ajoute le produit 1264 au dividende 6749, la somme **8**013 est formée du reste 013, précédé du quotient 8.

En effet, le quotient de 6749 par 842 étant 8 et le reste 13, on a (**65**)

$$6749 = 842.8 + 13.$$

Mais, le complément de 842 étant 158, on a $842 = 1000 - 158$, et, par suite,

$$6749 = (1000 - 158).8 + 13,$$

ou (**39**) $$6749 = 1000.8 - 158.8 + 13,$$

d'où $$6749 + 158.8 = 1000.8 + 13,$$

ou $$6749 + 158.8 = 8013.$$

76. On déduit, du théorème qui précède, la règle suivante :

Pour faire la division de deux nombres, on écrit, au-dessus du diviseur, le complément de ce nombre. On sépare, sur la gauche du dividende, autant de chiffres qu'il est nécessaire pour avoir un nombre qui contienne le diviseur. On divise ce nombre par le diviseur et on a le premier chiffre du quotient. On multiplie ce chiffre par le complément du diviseur, et on ajoute le produit au dividende partiel. On sépare le premier chiffre à gauche de la somme obtenue, lequel doit être égal au chiffre écrit au quotient, et on abaisse à droite le chiffre suivant du dividende : on forme ainsi le second dividende partiel, sur lequel on opère comme sur le premier, et ainsi de suite.

Cette règle offre l'avantage de remplacer les soustractions par des additions, et de reproduire, à gauche de chaque reste, le chiffre corres-

pondant du quotient, ce qui sert de contrôle à l'opération. Elle est particulièrement utile lorsque le diviseur a de forts chiffres.

Si on l'applique à la division de 36452333832 par 987654 ou par 36908, on trouve pour quotient **36908** ou **987654** et pour reste 0.

```
                 | 12346
36452333832      | 987654
  37038          |-------
-------          | 36908
36822713
   74076
-------
 68967898
  111114
-------
 907901232
     98768
-------
  8000000
```

```
                 | 63092
36452333832      | 36908
567828           |-------
-------          | 987654
9323513
 504736
-------
 8282493
  441644
-------
 7241378
  378552
-------
 6199303
  315460
-------
 5147632
  252368
-------
  400000
```

Preuve de la division.

77. Pour faire la preuve d'une division, on fait le produit du diviseur et du quotient, et on ajoute le reste à ce produit : la somme obtenue doit être égale au dividende (**65**).

Théorèmes relatifs à la division.

***78**. Théorème III. *Dans toute division, le dividende est plus grand que le double du reste.*

En effet, le dividende est égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste. Or le quotient est au moins égal à l'unité. Donc le dividende est au moins égal à une fois le diviseur, plus le reste, ou à la somme du diviseur et du reste. Mais le diviseur est plus grand que le reste. Donc le dividende est plus grand que le double du reste.

79. Théorème IV. *On divise un produit par l'un de ses facteurs, en supprimant ce facteur dans le produit.*

Soit le produit $a \times b \times c \times d$ à diviser par c.

Le produit proposé est égal à $a \times b \times d \times c$ (**55**), ou au produit de $a \times b \times d$ par c (**54**); si donc on le divise par c, le quotient sera $a \times b \times d$ (**63**).

80. Théorème V. *On divise un nombre par un produit, en le divisant successivement par les facteurs de ce produit;* c'est-à-dire en le divisant par le premier facteur, le quotient obtenu par le deuxième facteur, le nouveau quotient obtenu par le troisième facteur, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé tous les facteurs.

On suppose que la division du nombre par le produit se fait sans reste.

Soit à diviser le nombre N par le produit $a \times b \times c$, et soit q le quotient : je dis que, si l'on divise N successivement par a, b, c, le dernier quotient sera aussi égal à q.

En effet, le dividende N est égal au produit du diviseur $a \times b \times c$ par le quotient q, c'est-à-dire à $a \times b \times c \times q$. Si donc on divise N ou $a \times b \times c \times q$ par a, le quotient, d'après le théorème précédent, sera égal à $b \times c \times q$. Si l'on divise ce quotient par b, le nouveau quotient sera, de même, égal à $c \times q$. Enfin, si l'on divise ce second quotient par c, le troisième quotient sera égal à q : c'est ce qu'il fallait démontrer.

Lorsque la division du nombre par le produit ne se fait pas sans reste, le quotient entier peut encore s'obtenir de la manière indiquée. Quant au reste, il est égal à *la somme des restes des divisions successives, multipliés chacun par les diviseurs précédents.*

Soit à diviser le nombre N par le produit ABC.

On divise N par A : soit P le quotient et a le reste. On divise P par B : soit Q le quotient et b le reste. On divise Q par C : soit R le quotient et c le reste. Je dis que le quotient de N par ABC est R et que le reste est $a + b\mathrm{A} + c\mathrm{BA}$.

En effet, le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, plus le reste, et, d'autre part, le reste étant moindre que le diviseur,

d'au moins une unité, on a

$$N = AP + a, \qquad a \leq A - 1,$$
$$P = BQ + b, \qquad b \leq B - 1,$$
$$Q = CR + c, \qquad c \leq C - 1,$$

d'où, en multipliant respectivement par 1, par A et par AB,

$$N = AP + a, \qquad a \leq A - 1,$$
$$AP = ABQ + Ab, \qquad Ab \leq AB - A,$$
$$ABQ = ABCR + ABc, \qquad ABc \leq ABC - AB,$$

d'où, en ajoutant,

$$N = ABC.R + a + Ab + ABc, \quad a + Ab + ABc \leq ABC - 1.$$

Cette dernière égalité fait voir que, si l'on divise N par ABC, le quotient entier sera R et le reste $a + Ab + ABc$.

81. Théorème VI. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient entier ne change pas, mais le reste est multiplié ou divisé par ce nombre.*

1° Supposons qu'en divisant A par B, on ait trouvé pour quotient entier Q et pour reste R : je dis qu'en divisant Am par Bm, on aura encore pour quotient entier Q et pour reste Rm.

En effet, le quotient de la division de A par B étant Q et le reste R, on a

$$A = BQ + R.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par m, en observant que, pour multiplier une somme par un nombre, on multiplie chaque partie de la somme par ce nombre (**39**); il viendra

$$Am = BQm + Rm, \quad \text{ou} \quad Am = Bm.Q + Rm.$$

Puisque le reste R est moindre que le diviseur B, Rm est aussi moindre que Bm : par suite, la dernière égalité fait voir que, si l'on divise Am par Bm, le quotient entier sera Q et le reste Rm, ce qui démontre la première partie du théorème.

*2° Dans la seconde partie du théorème, on suppose que la division du dividende A et du diviseur B par m se fait sans reste. Appelons a et b les quotients : on aura $A = am$ et $B = bm$.

Cela posé, soient Q le quotient entier de A par B, et R le reste. Soient, de même, q le quotient entier de a par b, et r le reste. Je dis que l'on a $q = Q$ et $r = R : m$.

En effet, le quotient entier de a par b étant q et le reste r, on a

$$a = bq + r, \quad r < b,$$

d'où, en multipliant par m,

$$am = bmq + rm, \quad rm < bm,$$

ou, en remplaçant am par A et bm par B,

$$A = Bq + rm, \quad rm < B.$$

Mais le quotient entier de A par B étant Q et le reste R, on a aussi

$$A = BQ + R, \quad R < B.$$

Comparant les deux dernières égalités, on voit que l'on a

$$Bq + rm = BQ + R,$$

ou

$$Bq - BQ = R - rm.$$

Or, si les quotients q et Q n'étaient pas égaux, le premier membre de cette dernière égalité serait égal à un certain nombre de fois B, tandis que le second membre est moindre que B, puisqu'il est la différence de deux nombres moindres que B; ce qui est absurde. On a donc $q = Q$, et, par suite, $R = rm$, ou $r = R : m$, ce qu'il fallait démontrer (*).

(*) Cette démonstration fait voir que, ***si le dividende et le diviseur sont divisibles par un certain nombre, le reste est aussi divisible par le même nombre.*** Cette proposition sera établie plus loin par d'autres considérations (164).

CHAPITRE VI

ÉLÉVATION AUX PUISSANCES

82. On nomme *puissance deuxième, troisième, quatrième...* d'un nombre, le produit de deux, trois, quatre... facteurs égaux à ce nombre.

La deuxième puissance d'un nombre est, le plus souvent, appelée *carré,* et la troisième puissance est, le plus souvent, appelée *cube* (*).

Le nombre de facteurs égaux, dont le produit constitue une puissance, est dit le *degré* de cette puissance.

Pour indiquer une puissance d'un nombre, on écrit ce nombre, puis, à sa droite et un peu au-dessus, le degré de la puissance.

Le degré ainsi écrit prend le nom d'*exposant* (**).

Ainsi, pour indiquer le carré, le cube, la quatrième puissance... de 6, c'est-à-dire les produits 6×6, $6 \times 6 \times 6$, $6 \times 6 \times 6 \times 6$,... on écrit :

$$6^2, \quad 6^3, \quad 6^4, \ldots$$

et on lit : 6 *au carré* ou 6 *exposant deux,* 6 *au cube* ou 6 *exposant trois,* 6 *exposant quatre...*

Par extension de langage, on appelle *première puissance* d'un nombre ce nombre lui-même. L'exposant est alors supposé égal à l'unité.

Ainsi 6 ou 6^1 est la première puissance de 6.

L'opération par laquelle on forme les puissances des nombres se nomme *élévation aux puissances.*

(*) Ces dénominations de ***carré*** et de ***cube*** ont été empruntées à la Géométrie. En effet, l'aire de la figure géométrique nommée ***carré*** est égale à la ***seconde puissance*** du côté de ce carré, et le volume de la figure géométrique nommée ***cube*** est égal à la ***troisième puissance*** de l'arête de ce cube.

(**) La notation des exposants a été employée pour la première fois par NICOLAS CHUQUET, en 1484.

83. Il n'existe pas de procédé particulier pour former les puissances des nombres, mais cette opération se réduit à une suite de multiplications.

Toutefois, le carré d'un nombre entier, de 43867, par exemple, peut être formé d'après la règle suivante :

On écrit, les uns au-dessous des autres, et en avançant chaque fois d'un rang vers la droite, le carré 16 *du premier chiffre à gauche* 4 *du nombre donné, et les doubles produits* 24, 64, 48, 56 *de ce premier chiffre* 4 *par chacun des suivants* 3, 8, 6, 7; *puis, deux rangs à droite des résultats précédents, le carré* 09 *du deuxième chiffre* 3, *et les doubles produits* 48, 36, 42 *de ce deuxième chiffre* 3 *par chacun des suivants* 8, 6, 7, *et ainsi de suite jusqu'au carré* 49 *du dernier chiffre* 7.

$$
\begin{array}{c}
4\,3\,8\,6\,7^2 \\
\hline
1\,6\,0\,9\,6\,4\,3\,6\,4\,9 \\
2\,4\,4\,8\,9\,6\,8\,4 \\
6\,4\,3\,6^{11}\,2 \\
4\,8\,4\,2 \\
5\,6 \\
\hline
\mathbf{1\,9\,2\,4\,3\,1\,3\,6\,8\,9}
\end{array}
$$

Pour justifier cette règle, il suffit d'observer que le produit de 43867 par 43867 renferme une fois le produit de chaque chiffre par lui-même, ou le carré de chaque chiffre, et deux fois le produit de chaque chiffre par un autre de rang différent (*).

84. Théorème I. *Pour multiplier deux ou plusieurs puissances d'un même nombre, on ajoute les exposants.*

Soit à multiplier a^4 par a^5. Le nombre a^4 se composant de 4 facteurs égaux à a et le nombre a^5 de 5 facteurs égaux à a, le produit de a^4 par a^5 se composera de 4 plus 5 ou de 9 facteurs égaux à a. On a donc

$$a^4 \times a^5 = a^{4+5} = a^9.$$

85. Théorème II. *Pour diviser l'une par l'autre deux puissances d'un même nombre, on retranche l'exposant du diviseur de l'exposant du dividende.*

Soit à diviser a^9 par a^4. L'exposant 9 est la somme des nombres 4 et 9 — 4 : donc, d'après ce qu'on vient de voir, a^9 est le produit de a^4 par a^{9-4}. Par suite, si l'on divise a^9 par a^4, le quotient sera a^{9-4}. On a donc

$$a^9 : a^4 = a^{9-4} = a^5.$$

(*) Il est utile aussi de remarquer que *toute puissance de* 10 *est égale à l'unité suivie d'un nombre de zéros égal au degré de la puissance.*

Ainsi la sixième puissance de 10 est égale à l'unité suivie de six zéros, ou à 1000000.

86. Théorème III. *Pour élever une puissance d'un nombre à une autre puissance, on multiplie l'exposant de la première par l'exposant de la seconde.*

Soit à élever a^3 à la quatrième puissance. On a, par définition (**82**),

$$(a^3)^4 = a^3 \times a^3 \times a^3 \times a^3,$$

ou, d'après le premier théorème (**84**),

$$(a^3)^4 = a^{3+3+3+3},$$

ou (**38**)

$$(a^3)^4 = a^{3 \times 4} = a^{12}.$$

CHAPITRE VII

EXTRACTION DES RACINES

87. On nomme *racine deuxième, troisième, quatrième...* d'un nombre, un autre nombre qui, élevé à la deuxième, troisième, quatrième... puissance, reproduit le premier.

La racine deuxième d'un nombre est, le plus souvent, appelée *racine carrée,* et la racine troisième est, le plus souvent, appelée *racine cubique.*

Le degré de la puissance à laquelle il faut élever la racine d'un nombre pour reproduire ce nombre est dit le *degré* de la racine.

Pour indiquer la racine d'un nombre, on écrit ce nombre sous le signe $\sqrt{}$, appelé *radical* (*), puis, à la gauche de ce signe et un peu au-dessus, le degré de la racine.

Le degré ainsi écrit se nomme *indice.*

Ainsi, pour indiquer la racine carrée de 36, la racine cubique de 216, la racine quatrième de 1296, la racine cinquième de 7776, etc., on écrit :

$$\sqrt[2]{36} \text{ ou } \sqrt{36}, \quad \sqrt[3]{216}, \quad \sqrt[4]{1296}, \quad \sqrt[5]{7776}, \quad \text{etc.}$$

(*) Le signe $\sqrt{}$ a été employé pour la première fois par Christophe Rudolph, en 1522.

L'opération par laquelle on détermine les racines des nombres se nomme *extraction des racines.*

L'extraction des racines est une première opération *inverse* de l'élévation aux puissances.

88. Il n'existe pas toujours de nombre entier qui, élevé à une certaine puissance, reproduise un nombre entier donné.

Ainsi, les carrés des nombres 7 et 8 étant 49 et 64, aucun nombre compris entre 49 et 64 ne peut être le carré d'un nombre entier.

On cherche alors la racine deuxième, troisième, quatrième... de la plus grande puissance entière deuxième, troisième, quatrième... contenue dans le nombre donné. Cette racine est appelée *entière,* et l'excès du nombre sur la plus grande puissance entière qu'il renferme est appelé le *reste* de l'opération.

Lorsqu'un nombre est exactement la puissance deuxième, troisième, quatrième... d'un autre nombre, on l'appelle puissance *parfaite* deuxième, troisième, quatrième...

Ainsi le nombre 36 est un carré parfait, le nombre 125 un cube parfait, le nombre 32 une puissance cinquième parfaite.

Extraction de la racine carrée.

89. Lorsqu'un nombre est moindre que 100, sa racine carrée est moindre que 10, en sorte que, pour la connaître, il suffit de savoir par cœur *les carrés des neuf premiers nombres*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

lesquels sont :

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Soit, par exemple, à extraire la racine carrée de 55.

Le nombre 55 étant plus grand que 49, qui est le carré de 7, mais moindre que 64, qui est le carré de 8, sa *racine carrée entière* est **7**, et le *reste* de l'opération est 55 moins 49 ou **6**.

90. Lorsqu'un nombre est plus grand que 100, sa racine carrée entière est au moins égale à 10 : elle se compose donc d'un chiffre des unités et d'un certain nombre de dizaines.

Il s'ensuit qu'il faut d'abord faire connaître la composition du carré d'un nombre formé de dizaines et d'unités.

Pour cela, nous établirons ce théorème général, que *le carré de la somme de deux nombres est égal au carré du premier, plus le double produit du premier par le second, plus le carré du second.*

Soit, par exemple, à faire le carré de la somme 5 + 7.

Le carré d'un nombre étant le produit de ce nombre par lui-même, on a

$$(5 + 7)^2 = (5 + 7).(5 + 7),$$

ou, en observant que, pour multiplier une somme par une somme, on multiplie chaque partie de la première par chaque partie de la seconde (**41**),

$$(5 + 7)^2 = 5.5 + 7.5 + 5.7 + 7.7.$$

Mais 5.5 est le carré de 5, 7.5 est égal à 5.7 (**42**), et 7.7 est le carré de 7. Par conséquent,

$$(5 + 7)^2 = 5^2 + 2 \text{ fois } 5.7 + 7^2,$$

ce qu'il fallait démontrer (*).

On conclut de là, en particulier, que *le carré d'un nombre entier composé de dizaines et d'unités est égal au carré des dizaines, plus le double produit des dizaines par les unités, plus le carré des unités.*

91. Soit à extraire la racine carrée du nombre 7739.

1° Ce nombre étant plus grand que 100, qui est le carré de 10, sa racine carrée renferme des dizaines et des unités. On peut donc regarder le nombre 7739 comme composé de quatre parties, qui sont : le carré des

---

(*) On a, d'une manière générale, en représentant par a et b les deux nombres,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

dizaines de la racine, le double produit des dizaines de la racine par les unités, le carré des unités, le reste, s'il y en a un.

77.39	**87**	
64	168	167
133.9	8	7
1169	1344	1169
170		

La première de ces quatre parties étant le carré d'un nombre de dizaines est un nombre de centaines, lesquelles sont toutes contenues dans les 77 centaines du nombre proposé.

D'un autre côté, dans ces 77 centaines, il peut y avoir des centaines provenant de la somme des trois autres parties, ou du double produit des dizaines de la racine par les unités, du carré des unités, et du reste, s'il y en a un.

Je dis néanmoins que *la racine carrée entière* **8** *du nombre de centaines* 77 *contenu dans le nombre donné* 7739 *est le nombre exact des dizaines de la racine de ce nombre.*

En effet, la racine carrée entière de 77 étant supposée égale à 8, on a

$$8^2 < 77 < 9^2.$$

La première inégalité n'exclut pas l'égalité, car le nombre des centaines pourrait être un carré parfait; mais les deux derniers nombres diffèrent d'*au moins une unité,* sinon la racine carrée entière de 77 serait au moins égale à 9, et non à 8, ainsi qu'on l'a supposé.

De ces inégalités, on déduit, en multipliant chaque nombre par 100,

$$8^2.100 < 7700 < 9^2.100.$$

Les deux derniers nombres diffèrent maintenant d'*au moins une centaine.* Si donc on ajoute au nombre 7700 le nombre 39, qui est moindre qu'une centaine, la seconde inégalité subsistera encore, et à plus forte raison la première. On aura ainsi :

$$8^2.100 < 7739 < 9^2.100,$$

ou

$$80^2 < 7739 < 90^2.$$

Le nombre 7739 est donc plus grand que le carré de 8 dizaines, mais moindre que le carré de 9 dizaines : donc **8** est le nombre des dizaines de la racine carrée entière de ce nombre.

2° Le nombre des dizaines de la racine carrée entière du nombre 7739 étant 8, il s'ensuit que ce nombre peut être considéré comme composé de quatre parties, qui sont : le carré des 8 dizaines de sa racine, le double produit de ces 8 dizaines par les unités, le carré des unités et le reste. Si donc du nombre 7739 on retranche le carré 64 centaines des 8 dizaines de sa racine, le reste 13 centaines et 39 unités ou 1339 contiendra encore trois parties, qui sont : le double produit des 8 dizaines de la racine par les unités, le carré des unités et le reste.

La première de ces trois parties, ou le double produit des 8 dizaines de la racine par les unités, est un nombre de dizaines, lesquelles sont toutes contenues dans les 133 dizaines du reste 1339. Mais, dans ces 133 dizaines du reste, il peut y avoir aussi des dizaines provenant de la somme des deux autres parties. *Si* donc *on divise* 133 *par le double* 16 *du nombre* 8 *des dizaines de la racine, le quotient entier* 8 *sera le chiffre exact des unités de la racine ou un chiffre trop fort.*

Pour essayer le chiffre 8, on peut l'écrire à la droite du chiffre 8 des dizaines de la racine, faire le carré du nombre 88 ainsi formé, et voir si ce carré ne surpasse pas 7739. Mais, puisqu'on a déjà retranché de 7739 le carré de 8 dizaines, ce qui a donné le reste 1339, il est plus simple de former la somme des deux autres parties du carré de 88, et de voir si cette somme ne surpasse pas 1339. Il suffit, pour cela, d'écrire le chiffre 8 des unités à la droite du double 16 des dizaines de la racine, et de faire le produit par 8 du nombre 168 ainsi formé : car ce produit de 168 par 8 contiendra le produit de 8 par 8 ou le carré des unités de la racine, et le produit de 16 dizaines par 8 ou le double produit des dizaines de la racine par les unités. Le produit de 168 par 8 est 1344, nombre qui surpasse le reste 1339 : donc le chiffre 8 est trop fort.

Pour essayer le chiffre 7, on multiplie 167 par 7 : le produit est 1169, nombre moindre que le reste 1339 : donc **7** est le chiffre des unités de la racine, et, par suite, **87** est la racine carrée entière du nombre 7739. Le reste ou l'excès de 7739 sur le carré de 87 est d'ailleurs égal à 1339 moins 1169 ou à **170**.

92 Soit encore à extraire la racine carrée du nombre 98765432.

1° Ce nombre étant plus grand que 100, qui est le carré de 10, sa racine carrée renferme des dizaines et des unités. On démontrera, comme dans l'exemple précédent, qu'*en extrayant la racine carrée entière du nombre de centaines* 987654 *contenu dans le nombre donné, on aura le nombre exact des dizaines de la racine de ce nombre.*

On est donc conduit à extraire la racine carrée entière du nombre 987654, qui a deux chiffres de moins que le nombre proposé. Or, le nombre 987654 étant lui-même plus grand que 100, sa racine carrée se compose aussi de dizaines et d'unités. On fera voir, comme précédemment, que le nombre des dizaines de cette racine est la racine carrée entière du nombre de centaines 9876 contenu dans 987654.

On est donc conduit à extraire la racine carrée entière du nombre 9876, qui a deux chiffres de moins que le nombre 987654. Or, le nombre 9876 étant encore plus grand que 100, sa racine carrée se compose aussi de dizaines et d'unités. On fera voir, comme précédemment, que le nombre des dizaines de cette racine est la racine carrée entière du nombre de centaines 98 contenu dans 9876.

98.76.54.32	**9938**		
81	189	1983	19868
177.6	9	3	8
1701	1701	5949	158944
755.4			
5949			
16053.2			
158944			
1588			

On est donc conduit à extraire la racine carrée entière du nombre 98, qui a deux chiffres de moins que le nombre 9876. Or, le nombre 98 étant moindre que 100, sa racine carrée n'a qu'un chiffre. Le plus grand carré contenu dans 98 est 81, dont la racine carrée est 9 : donc **9** est le chiffre des dizaines de la racine carrée du nombre 9876.

2° Si, du nombre 9876, on retranche le carré 81 centaines des 9 dizaines de la racine, on trouve pour reste 17 centaines et 76 unités ou 1776. On

démontrera, comme dans le premier exemple, qu'*en divisant le nombre* 177 *des dizaines de ce reste par le double* 18 *des* 9 *dizaines de la racine, on aura un quotient entier* 9 *égal ou supérieur au chiffre des unités de la racine du nombre* 9876.

Pour essayer le chiffre 9, on l'écrit à la droite du double 18 des dizaines de la racine, et on multiplie par 9 le nombre 189 ainsi formé. Le produit est 1701, nombre moindre que le reste 1776 : donc **9** est le chiffre des unités de la racine, et, par suite, **99** est la racine carrée entière du nombre 9876. Le reste ou l'excès de 9876 sur le carré de 99 est d'ailleurs égal à 1776 moins 1701 ou à 75.

La racine carrée entière de 9876 étant 99 et le reste 75, 99 est le nombre des dizaines de la racine du nombre 987654, et le reste est 7554. On fera voir, comme précédemment, qu'*en divisant le nombre* 755 *des dizaines de ce reste par le double* 198 *des* 99 *dizaines de la racine* (*), *on aura un quotient entier* 3 *égal ou supérieur au chiffre des unités de la racine du nombre* 987654.

Pour essayer le chiffre 3, on l'écrit à la droite du double 198 des dizaines de la racine, et on multiplie par 3 le nombre 1983 ainsi formé. Le produit est 5949, nombre moindre que le reste 7554 : donc **3** est le chiffre des unités de la racine, et, par suite, **993** est la racine carrée entière du nombre 987654. Le reste ou l'excès de 987654 sur le carré de 993 est d'ailleurs égal à 7554 moins 5949 ou à 1605.

La racine carrée entière de 987654 étant 993 et le reste 1605, 993 est le nombre des dizaines de la racine du nombre 98765432, et le reste est 160532. On fera voir, comme précédemment, qu'*en divisant le nombre* 16053 *des dizaines de ce reste par le double* 1986 *des* 993 *dizaines de la racine, on aura un quotient entier* 8 *égal ou supérieur au chiffre des unités de la racine du nombre* 98765432.

Pour essayer le chiffre 8, on l'écrit à la droite du double 1986 des dizaines de la racine, et on multiplie par 8 le nombre 19868 ainsi formé.

(*) Pour former le double 198 de 99, il suffit d'augmenter le nombre 189, précédemment formé, du chiffre 9 de ses unités.

Le produit est **158944**, nombre moindre que le reste **160532** : donc **8** est le chiffre des unités de la racine, et, par suite, **9938** est la racine carrée entière du nombre 98765432. Le reste ou l'excès de 98765432 sur le carré de 9938 est d'ailleurs égal à **160532** moins **158944** ou à **1588**.

93. On déduit, des raisonnements qui précèdent, la règle suivante :

Pour extraire la racine carrée d'un nombre entier, on partage ce nombre en tranches de deux chiffres à partir de la droite, la première tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un seul chiffre : le nombre des tranches est égal au nombre des chiffres de la racine.

On extrait la racine carrée entière du nombre formé par la première tranche à gauche, et on a ainsi le premier chiffre à gauche de la racine.

On soustrait le carré de ce chiffre de la première tranche et on abaisse à la droite du reste la tranche suivante; on sépare le dernier chiffre à droite du nombre ainsi formé, et on divise la partie à gauche par le double du chiffre déjà trouvé à la racine : le quotient entier est le second chiffre de la racine ou un nombre trop grand. Pour l'essayer, on l'écrit à la droite du double du premier chiffre de la racine, et on multiplie le nombre ainsi formé par le chiffre essayé. Si le produit peut être soustrait du nombre qu'on a obtenu en abaissant la seconde tranche, le chiffre essayé est exact. Sinon, on essaie de la même manière le chiffre inférieur d'une unité, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait trouvé le chiffre exact.

Quand on a trouvé le second chiffre de la racine, on abaisse à la droite du nouveau reste la troisième tranche; on sépare le dernier chiffre à droite du nombre ainsi formé, et on divise la partie à gauche par le double du nombre exprimé par les deux premiers chiffres de la racine : le quotient entier est le troisième chiffre de la racine ou un nombre trop grand. On le vérifie comme le second chiffre.

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait déterminé tous les chiffres de la racine.

Il peut arriver, dans l'application de cette règle, que le quotient entier d'une division soit plus grand que 9 : on commence, dans ce cas, les essais par le chiffre 9.

Il peut arriver aussi que le quotient entier d'une division soit 0 : on écrit alors 0 à la racine; puis, ayant abaissé une nouvelle tranche, on continue l'opération de la même manière.

94. Afin de familiariser le lecteur avec l'emploi de la règle précédente, nous l'appliquerons encore à l'extraction de la racine carrée du nombre 396044901467806.

```
3.9 6.0 4.4 9.0 1.4 6.7 8.0 6
1
---
2 9.6
2 6 1
-----
  3 5 0.4
  3 5 0 1
  -------------
        3 4.9 0.1 4.6
        3 1 8 4 0 6 4
        -------------
          3 0 6 0 8 2 7.8
          2 7 8 6 1 1 6 9
          -------------
            2 7 4 7 1 0 9 0.6
            2 3 8 8 1 0 4 7 6
            -------------
              3 5 9 0 0 4 3 0
```

19900876

29	389	398008	3980167
9	9	8	7
261	3501	3184064	27861169

```
39801746
       6
---------
238810476
```

La racine carrée est **19900876** et le reste **35900430.**

95. *Le reste obtenu en extrayant la racine carrée entière d'un nombre entier ne peut surpasser le double de la racine.*

En effet, supposons que la racine carrée entière d'un nombre entier soit a. Le nombre est égal au carré de sa racine, plus le reste. Si donc ce reste pouvait surpasser le double de la racine, le nombre serait au moins égal à

$$a^2 + 2a + 1,$$

ou au carré de $a + 1$. Dès lors, la racine carrée entière du nombre ne serait pas a, mais au moins $a + 1$, ce qui est contre l'hypothèse.

96. Pour faire la preuve de l'extraction de la racine carrée entière d'un nombre entier, on s'assure d'abord si le reste de l'opération ne surpasse pas le double de la racine. On fait ensuite le carré de la racine, et on l'ajoute au reste : la somme obtenue doit être égale au nombre donné (*).

Extraction de la racine cubique.

97. Lorsqu'un nombre est moindre que 1000, sa racine cubique est moindre que 10, en sorte que, pour la connaître, il suffit de savoir par cœur *les cubes des neuf premiers nombres*

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

lesquels sont :

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729.

Soit, par exemple, à extraire la racine cubique de 625.

Le nombre 625 étant plus grand que 512, qui est le cube de 8, mais moindre que 729, qui est le cube de 9, sa racine cubique entière est **8**, et le reste de l'opération est 625 moins 512 ou **113**.

98. Lorsqu'un nombre est plus grand que 1000, sa racine cubique entière est au moins égale à 10 : elle se compose donc d'un chiffre des unités et d'un certain nombre de dizaines.

Il s'ensuit qu'il faut d'abord faire connaître la composition du cube d'un nombre formé de dizaines et d'unités.

Pour cela, nous établirons ce théorème général, que *le cube de la somme de deux nombres est égal au cube du premier, plus le triple produit du carré du premier par le second, plus le triple produit du premier par le carré du second, plus le cube du second.*

(*) Il peut être utile de remarquer :

1° Que *le carré d'un nombre terminé par* 1, 2. 3... *zéros, est terminé par* 2, 4, 6... *zéros;*

2° Qu'*un nombre terminé par* 2, 3, 7. 8. *ne peut être un carré parfait;*

3° Que *le chiffre des dizaines d'un nombre carré est pair, excepté lorsque ce carré est terminé par* 6;

4° Que *le carré d'un nombre terminé par* 5 *est terminé par* 025, 225 *ou* 625;

5° Que *le chiffre unique* (153) *d'un nombre carré est* 1, 4, 7 *ou* 9.

Soit, par exemple, à faire le cube de la somme 5 + 7.

Le cube d'un nombre étant le produit de trois facteurs égaux à ce nombre, on a successivement (**41**) :

$$\begin{aligned}(5+7)^3 &= (5+7).(5+7).(5+7)\\ &= (5.5+7.5+5.7+7.7).(5+7)\\ &= 5.5.5+7.5.5+5.7.5+7.7.5+5.5.7+7.5.7+5.7.7+7.7.7\\ &= 5^3 + 3 \text{ fois } 5^2.7 + 3 \text{ fois } 5.7^2 + 7^3 \ (^*).\end{aligned}$$

On conclut de là, en particulier, que *le cube d'un nombre entier composé de dizaines et d'unités est égal au cube des dizaines, plus le triple produit du carré des dizaines par les unités, plus le triple produit des dizaines par le carré des unités, plus le cube des unités.*

99. Soit à extraire la racine cubique du nombre 97 531.

1° Ce nombre étant plus grand que 1000, qui est le cube de 10, sa racine cubique renferme des dizaines et des unités. On peut donc regarder le nombre 97531 comme composé de cinq parties, qui sont : le cube des dizaines de la racine, le triple produit du carré des dizaines par les unités, le triple produit des dizaines par le carré des unités, le cube des unités, et le reste, s'il y en a un.

97.531	**46**
64	$4^3 = 64$
335 | 48	$4^2 \times 3 = 48$
6	$46^3 = 97336$
97.531	
97336	
195	

La première de ces cinq parties étant le cube d'un nombre de dizaines, est un nombre de mille, lesquels sont tous contenus dans les 97 mille du nombre proposé.

D'un autre côté, dans ces 97 mille, il peut y avoir des mille provenant de la somme des quatre autres parties, ou du triple produit du carré des dizaines de la racine par les unités, du triple produit des dizaines par le carré des unités, du cube des unités, et du reste, s'il y en a un.

(*) On a, d'une manière générale, en représentant par a et b les deux nombres,

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Je dis néanmoins que *la racine cubique entière* **4** *du nombre de mille* 97 *contenu dans le nombre donné* 97531 *est le nombre exact des dizaines de la racine de ce nombre.*

En effet, la racine cubique entière de 97 étant supposée égale à 4, on a

$$4^3 < 97 < 5^3.$$

La première inégalité n'exclut pas l'égalité, car le nombre des mille pourrait être un cube parfait; mais les deux derniers nombres diffèrent d'*au moins une unité*, sinon la racine cubique entière de 97 serait au moins égale à 5, et non à 4, ainsi qu'on l'a supposé.

De ces inégalités on déduit, en multipliant chaque nombre par 1000,

$$4^3.\ 1000 < 97000 < 5^3.\ 1000.$$

Les deux derniers nombres diffèrent maintenant d'*au moins un mille.* Si donc on ajoute au nombre 97000 le nombre 531, qui est moindre qu'un mille, la seconde inégalité subsistera encore, et à plus forte raison la première. On aura ainsi :

$$4^3.\ 1000 < 97531 < 5^3.\ 1000, \qquad \text{ou} \qquad 40^3 < 97531 < 50^3.$$

Le nombre 97531 est donc plus grand que le cube de **4** dizaines, mais moindre que le cube de 5 dizaines : donc **4** est le nombre des dizaines de la racine cubique entière de ce nombre.

2° Le nombre des dizaines de la racine cubique entière du nombre 97531 étant 4, il s'ensuit que ce nombre peut être considéré comme composé de cinq parties, qui sont : le cube des 4 dizaines de sa racine, le triple produit du carré de ces 4 dizaines par les unités, le triple produit de ces 4 dizaines par le carré des unités, le cube des unités et le reste. Si donc du nombre 97531 on retranche le cube 64 mille des 4 dizaines de sa racine, le reste 33531 contiendra encore quatre parties, qui sont : le triple produit du carré des 4 dizaines par les unités, le triple produit des 4 dizaines par le carré des unités, le cube des unités et le reste.

La première de ces quatre parties, ou le triple produit du carré des 4 dizaines par les unités, est un nombre de centaines, lesquelles sont

toutes contenues dans les 335 centaines du reste 33531. Mais, dans ces 335 centaines du reste, il peut y avoir aussi des centaines provenant de la somme des trois autres parties. *Si* donc *on divise* 335 *par le triple carré* 48 *du nombre* 4 *des dizaines de la racine, le quotient entier* 6 *sera le chiffre exact des unités de la racine ou un chiffre trop fort.*

Pour essayer le chiffre 6, on peut l'écrire à la droite du chiffre 4 des dizaines de la racine, faire le cube du nombre 46 ainsi formé, et voir si ce cube ne surpasse pas 97531. Le cube de 46 est 97336, nombre moindre que 97531 : donc **46** est la racine cubique entière du nombre 97531. Le reste de l'opération est d'ailleurs égal à 97531 moins 97336 ou à **195.**

***100.** On peut, si l'on veut, se dispenser de former le cube du nombre 46. Car, puisqu'on a déjà retranché de 97531 le cube de 4 dizaines, ce qui a donné le reste 33531, il suffit de former la somme des trois autres parties du cube de 46, et de voir si cette somme ne surpasse pas 33531.

97.531	**46**
64	4800
335.31	720
333 36	36
195	5556
	6
	33336

Le triple carré des 4 dizaines de la racine étant 48 centaines, le triple produit du carré des 4 dizaines par 6 unités est égal à 4800 × 6.

De même, le triple produit de 4 dizaines par 6 unités étant 72 dizaines, le triple produit de 4 dizaines par le carré de 6 unités est égal à 720 × 6.

Enfin, le carré de 6 unités étant 36 unités, le cube de 6 unités est égal à 36 × 6.

La somme de ces trois parties du cube de 46 est donc égale à (4800 + 720 + 36) × 6 ou à 5556 × 6 ou à 33336 (*).

Ce produit 33336 est moindre que le reste 33531 : donc **6** est le chiffre des unités de la racine, et, par suite, **46** est la racine cubique entière du nombre 97531. Le reste ou l'excès de 97531 sur le cube de 46 est d'ailleurs égal à 33531 moins 33336 ou à **195.**

(*) L'emploi des notations algébriques simplifie cette démonstration. On a, en effet, en désignant par a les dizaines et par b les unités de la racine,

$$3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (3a^2 + 3ab + b^2) \times b.$$

101. Soit encore à extraire la racine cubique du nombre 416340875.

1° Ce nombre étant plus grand que 1000, qui est le cube de 10, sa racine cubique renferme des dizaines et des unités. On démontrera, comme dans l'exemple précédent, qu'*en extrayant la racine cubique entière du nombre de mille* 416340 *contenu dans le nombre donné, on aura le nombre exact des dizaines de la racine de ce nombre.*

On est donc conduit à extraire la racine cubique entière du nombre 416340, *qui a trois chiffres de moins que le nombre proposé.* Or, le nombre 416340 étant lui-même plus grand que 1000, sa racine cubique se compose aussi de dizaines et d'unités. On fera voir, comme précédemment, que le nombre des dizaines de cette racine est la racine cubique entière du nombre de mille 416 contenu dans 416340.

On est donc conduit à extraire la racine cubique entière de 416, *qui a trois chiffres de moins que le nombre* 416340. Or, le nombre 416 étant moindre que 1000, sa racine cubique n'a qu'un seul chiffre. Le plus grand cube contenu dans 416 est 343, dont la racine cubique est 7 : donc **7** est le chiffre des dizaines de la racine cubique du nombre 416340.

4 1 6.3 4 0 8 7 5	**746**
3 4 3	$7^3 = 343$
7 3 3 | 147	$7^2 \times 3 = 147$
| 4	$74^3 = 405224$
4 1 6 3 4 0.8 7 5	
4 0 5 2 2 4	$74^2 \times 3 = 16428$
1 1 1 1 6 8 | 16428	$746^3 = 415160936$
| 6	
4 1 6 3 4 0 8 7 5	
4 1 5 1 6 0 9 3 6	
1 1 7 9 9 3 9	

2° Si, du nombre 416340, on retranche le cube 343 mille des 7 dizaines de la racine, on trouve pour reste 73340. On démontrera, comme dans le

premier exemple, qu'*en divisant le nombre* 733 *des centaines de ce reste par le triple carré* 147 *des* 7 *dizaines de la racine, on aura un quotient entier* 4 *égal ou supérieur au chiffre des unités de la racine du nombre* 416340.

Pour essayer le chiffre 4, on peut l'écrire à la droite du chiffre 7 des dizaines de la racine, faire le cube du nombre 74 ainsi formé, et voir si ce cube ne surpasse pas 416340. Le cube de 74 est 405224, nombre moindre que 416340 : donc **74** est la racine cubique entière du nombre 416340, et le reste est 416340 moins 405224 ou **11116.**

La racine cubique entière de 416340 étant 74 et le reste 11116, **74** est le nombre des dizaines de la racine du nombre 416340875, et le reste est 11116875. On fera voir encore qu'*en divisant le nombre* 111168 *des centaines de ce reste par le triple carré* 16428 *des* 74 *dizaines de la racine, on aura un quotient entier* 6 *égal ou supérieur au chiffre des unités de la racine du nombre* 416340875.

Pour essayer le chiffre 6, on peut l'écrire à la droite du nombre 74 des dizaines de la racine, faire le cube du nombre 746 ainsi formé, et voir si ce cube ne surpasse pas 416340875. Le cube de 746 est 415160936, nombre moindre que 416340875 : donc **746** est la racine cubique entière du nombre 416340875, et le reste est 416340875 moins 415160936 ou **1179939.**

***102.** On peut, si l'on veut, abréger les calculs précédents.

En effet, pour essayer le chiffre 4 de la racine du nombre 416340, on peut, comme il a été dit (**100**), ajouter ensemble le triple carré 14700 des 7 dizaines de la racine, le triple produit 840 de 7 dizaines par 4 unités,

416.340.875	**746**		
343	14700	14700	1642800
733.40	840	1680	13320
62224	16	48	36
111168.75	15556	16428	1656156
9936936	4		6
1179939	62224		9936936

et le carré 16 de 4 unités, puis multiplier la somme obtenue 15556 par 4 unités. Le produit est 62224, nombre moindre que le reste 73340 : donc **4** est le chiffre des unités de la racine, et, par suite, **74** est la racine cubique entière du nombre 416340. Le reste ou l'excès de 416340 sur le cube de 74 est d'ailleurs égal à 73340 moins 62224 ou à **11116**.

La racine cubique entière de 416340 étant 74 et le reste 11116, **74** est le nombre des dizaines de la racine du nombre 416340875, et le reste est 11116875. Si l'on divise le nombre 111168 des centaines de ce reste par le triple carré du nombre 74 des dizaines de la racine, le quotient entier sera égal ou supérieur au chiffre des unités de la racine du nombre 416340875.

Pour obtenir rapidement le triple carré de 74, on observera que les trois nombres 14700, 840 et 16, formés précédemment, représentent respectivement le triple carré de 7 dizaines, le triple produit de 7 dizaines par 4 unités et le carré de 4 unités. *Si* donc *au premier* 14700 *de ces nombres on ajoute le double* 1680 *du second et le triple* 48 *du troisième, la somme* 16428 *sera égale* à trois fois le carré de 7 dizaines, plus 6 fois le produit de 7 dizaines par 4 unités, plus trois fois le carré de 4 unités, c'est-à-dire à trois fois le carré de 7 dizaines plus 4 unités, ou *au triple carré de* 74 (*).

Divisant donc 111168 par 16428, on trouve pour quotient entier 6.

Pour essayer ce chiffre 6, on ajoute ensemble le triple carré 1642800 des 74 dizaines de la racine, le triple produit 13320 de 74 dizaines par 6 unités, et le carré 36 de 6 unités; puis on multiplie la somme obtenue 1656156 par 6 unités. Le produit est 9936936, nombre moindre que le reste 11116875 : donc **6** est le chiffre des unités de la racine, et, par suite, **746** est la racine cubique entière du nombre 416340875. Le reste ou l'excès de 416340875 sur le cube de 746 est d'ailleurs égal à 11116875 moins 9936936 ou à **1179939**.

(*) On a, en employant les notations algébriques.

$$3(a+b)^2 = 3(a^2+2ab+b^2) = 3a^2+6ab+3b^2 = 3a^2.1+3ab.2+b^2.3.$$

103. On déduit, des raisonnements qui précèdent, la règle suivante : *Pour extraire la racine cubique entière d'un nombre entier, on partage ce nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite, la première tranche à gauche pouvant n'avoir qu'un ou deux chiffres :* le nombre des tranches est égal au nombre des chiffres de la racine.

On extrait la racine cubique entière du nombre formé par la première tranche à gauche et on a ainsi le premier chiffre à gauche de la racine.

On soustrait le cube de ce chiffre de la première tranche et on abaisse à la droite du reste le premier chiffre de la tranche suivante; on divise le nombre ainsi obtenu par le triple carré du chiffre déjà trouvé à la racine : le quotient entier est le second chiffre de la racine ou un nombre trop grand. Pour l'essayer, on l'écrit à la droite du premier chiffre de la racine, et on fait le cube du nombre ainsi obtenu. Si ce cube peut être soustrait du nombre formé par les deux premières tranches à gauche du nombre donné, le chiffre essayé est exact. Sinon, on essaie de la même manière le chiffre inférieur d'une unité, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait trouvé le chiffre exact.

Quand on a trouvé le second chiffre de la racine, on abaisse à la droite du nouveau reste le premier chiffre de la troisième tranche; on divise le nombre ainsi obtenu par le triple carré du nombre formé par les deux premiers chiffres de la racine : le quotient entier est le troisième chiffre de la racine ou un nombre trop grand. On le vérifie comme le second chiffre.

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait déterminé tous les chiffres de la racine.

104. Afin de familiariser le lecteur avec l'emploi de la règle précédente, nous l'appliquerons encore à l'extraction de la racine cubique entière du nombre 25000000000000000.

25.000.000.000.000.000	**292401**
8	$2^3 = 8$
17.0 | 12	$2^2 \times 3 = 12$
14 **9**	$29^3 = 24389$
25.000	
24389	
611	

```
6 1 1.0 | 2523
        |-----
        | 2
2 5 0 0 0.0 0 0
2 4 8 9 7 0 8 8
-----------------
    1 0 2 9 1 2.0 | 255792
                  |-------
                  | 4
2 5 0 0 0 0 0 0.0 0 0
2 4 9 9 9 5 4 5 0 2 4
-----------------------
        4 5 4 9 7 6.0 | 25649328
                      |---------
                      | 0
        4 5 4 9 7 6 0 0 0.0 | 2564932800
                            |-----------
                            | 1
2 5 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0.0 0 0
2 4 9 9 9 8 0 1 5 1 8 1 5 7 2 0 1
-----------------------------------
        1 9 8 4 8 1 8 4 2 7 9 9
```

$29^2 \times 3 = 2523$

$292^3 = 24897088$

$292^2 \times 3 = 255792$

$2924^3 = 24999545024$

$2924^2 \times 3 = 25649328$

$29240^2 \times 3 = 2564932800$

$292401^3 = 24999801518157201$

La racine cubique est **292401** et le reste **198481842799.**

***105.** Lorsqu'on tient compte des simplifications indiquées (**100** et **102**), la règle de l'extraction de la racine cubique peut être modifiée comme il suit :

Pour extraire la racine cubique entière d'un nombre entier, on partage ce nombre en tranches de trois chiffres à partir de la droite.

On extrait la racine cubique entière du nombre formé par la première tranche à gauche et on a ainsi le premier chiffre à gauche de la racine.

On soustrait le cube de ce chiffre de la première tranche et on abaisse à la droite du reste la tranche suivante ; on sépare les deux derniers chiffres à droite du nombre ainsi formé, et on divise la partie à gauche par le triple carré du chiffre déjà trouvé à la racine : le quotient entier est le second chiffre de la racine ou un nombre trop grand. Pour l'essayer, on forme : 1° le triple carré, suivi de deux zéros, du premier chiffre de la racine ; 2° le triple produit, suivi d'un zéro, du premier chiffre de la racine par le second ; 3° le carré du second chiffre. On fait la somme de ces trois nombres, et on multiplie cette somme par le second chiffre. Si le produit peut être soustrait du nombre qu'on

a obtenu en abaissant la seconde tranche, le chiffre essayé est exact. Sinon, on essaie de la même manière le chiffre inférieur d'une unité, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait trouvé le chiffre exact.

Quand on a trouvé le second chiffre de la racine, on abaisse à la droite du nouveau reste la troisième tranche; on sépare les deux derniers chiffres à droite du nombre ainsi formé, et on divise la partie à gauche par la somme des trois nombres formés précédemment, multipliés respectivement par 1, 2, 3 : *le quotient entier est le troisième chiffre de la racine ou un nombre trop grand. On le vérifie comme le second chiffre.*

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait déterminé tous les chiffres de la racine.

***106.** Appliquons aussi cette nouvelle règle à l'extraction de la racine cubique entière du nombre 25000000000.

25.000.000.000	**2924**				
8	1200	1200	252300	252300	25579200
170.00	540	1080	1740	3480	35040
16389	81	243	4	12	16
6110.00	1821	2523	254044	255792	25614256
508088	9		2		4
10291200.00	16389		508088		102457024
102457024					
454976					

La racine cubique est **2924** et le reste **454976.**

107. *Le reste obtenu en extrayant la racine cubique entière d'un nombre entier ne peut surpasser le triple carré plus le triple de la racine.*

En effet, supposons que la racine cubique entière d'un nombre entier soit a. Le nombre est égal au cube de sa racine, plus le reste. Si donc ce reste pouvait surpasser le triple carré plus le triple de la racine, le nombre serait au moins égal à

$$a^3 + 3a^2 + 3a + 1,$$

ou au cube de $a + 1$. Dès lors, la racine cubique entière du nombre ne serait pas a, mais au moins $a + 1$, ce qui est contre l'hypothèse.

108. Pour faire la preuve de l'extraction de la racine cubique entière d'un nombre entier, on s'assure d'abord si le reste de l'opération ne surpasse pas le triple carré plus le triple de la racine. On fait ensuite le cube de cette racine, et on l'ajoute au reste : la somme obtenue doit être égale au nombre donné (*).

Extraction d'une racine de degré quelconque.

***109.** En raisonnant comme on l'a fait pour la racine carrée et la racine cubique, on arrive facilement à extraire une racine de degré quelconque d'un nombre entier.

On trouve, en effet, que *la* n^e^ *puissance d'un nombre composé de dizaines et d'unités est égale à la* n^e^ *puissance des dizaines, plus* n *fois le produit de la* (n — 1)^e^ *puissance des dizaines par les unités, plus une suite d'autres termes* (**).

Cette proposition conduit à la règle suivante :

Pour extraire la racine n^e^ *d'un nombre entier, on partage ce nombre en tranches de* n *chiffres, à partir de la droite.*

On extrait la racine n^e^ *du nombre formé par la première tranche à gauche et on a ainsi le premier chiffre à gauche de la racine.*

On soustrait la n^e^ *puissance de ce chiffre de la première tranche et on abaisse à la droite du reste le premier chiffre de la tranche suivante; on divise le nombre ainsi obtenu par* n *fois la* (n — 1)^e^ *puissance du premier chiffre de la racine : le quotient entier est le second chiffre de la racine ou un nombre trop grand. Pour l'essayer, on l'écrit à la droite du premier chiffre de la racine, et on fait la* n^e^ *puissance du nombre ainsi*

(*) Il peut être utile de remarquer :

1° Que *le cube d'un nombre terminé par* 1, 2, 3... *zéros, est terminé par* 3, 6, 9... *zéros;*

2° Que, *si un cube est terminé par* 6, *le chiffre de ses dizaines est impair;*

3° Que, *si un cube est terminé par* 4 *ou par* 8, *le chiffre de ses dizaines est pair;*

4° Que *le cube d'un nombre terminé par* 5, *est terminé par* 125, 375, 625 *ou* 875;

5° Que *le chiffre unique* (153) *d'un cube est* 1, 8 *ou* 9.

(**) On a

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + \ldots, \quad (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + \ldots, \quad (a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + \ldots, \text{ etc.,}$$

et, en général,

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots$$

obtenu. Si cette puissance peut être soustraite du nombre formé par les deux premières tranches à gauche du nombre donné, le chiffre essayé est exact. Sinon, on essaie de la même manière le chiffre inférieur d'une unité, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait trouvé le chiffre exact.

Quand on a trouvé le second chiffre de la racine, on abaisse à la droite du nouveau reste le premier chiffre de la troisième tranche; on divise le nombre ainsi obtenu par n *fois la* (n — 1)^e *puissance du nombre formé par les deux premiers chiffres de la racine : le quotient entier est le troisième chiffre de la racine ou un nombre trop grand. On le vérifie comme le second chiffre.*

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on ait déterminé tous les chiffres de la racine (*).

On trouve, par exemple, que la racine cinquième du nombre 205891132094649 est **729** et le reste **0**.

2 0 5 8 9.1 1 3 2 0.9 4 6 4 9	**729**
1 6 8 0 7	$7^5 = 16807$
3 7 8 2.1 | 12005	$7^4 \times 5 = 12005$
~~5~~ **2**	$73^5 = 2073071593$
2 0 5 8 9.1 1 3 2 0	$72^5 = 1934917632$
1 9 3 4 9 1 7 6 3 2	$72^4 \times 5 = 134369280$
1 2 3 9 9 3 6 8 8.9 | 134369280	$729^5 = 205891132094649$
9	
2 0 5 8 9.1 1 3 2 0.9 4 6 4 9	
2 0 5 8 9 1 1 3 2 0 9 4 6 4 9	
0	

(*) Il peut être utile de remarquer :

1° Que *la quatrième puissance d'un nombre, non terminé par* 0 *ni par* 5, *est terminée par* 1 *ou par* 6;

2° Que *la quatrième puissance d'un nombre terminé par* 5, *est terminée par* 0625;

3° Que *la cinquième puissance d'un nombre est terminée par le même chiffre que ce nombre.*

Cas où le degré de la racine est un produit de plusieurs nombres.

110. Soit proposé d'extraire la racine trentième du nombre entier N

Le degré 30 de la racine étant le produit des nombres 2, 3, 5, on extraira la racine carrée entière de N : soit a cette racine; puis la racine cubique entière de a : soit b cette racine; puis la racine cinquième entière de b : soit c cette racine. Je dis que c est la racine trentième entière du nombre N.

En effet, la racine carrée entière de N étant a, N est égal ou supérieur à a^2, et $N + 1$ est égal ou inférieur à $(a + 1)^2$. De même, a est égal ou supérieur à b^3, et $a + 1$ est égal ou inférieur à $(b + 1)^3$. De même, b est égal ou supérieur à c^5, et $b + 1$ est égal ou inférieur à $(c + 1)^5$. On a donc

$$N \geqq a^2, \qquad N + 1 \leqq (a + 1)^2,$$
$$a \geqq b^3, \qquad a + 1 \leqq (b + 1)^3,$$
$$b \geqq c^5, \qquad b + 1 \leqq (c + 1)^5,$$

d'où, en élevant les secondes et les troisièmes inégalités respectivement à la deuxième et à la sixième puissance,

$$N \geqq a^2, \qquad N + 1 \leqq (a + 1)^2,$$
$$a^2 \geqq b^6, \qquad (a + 1)^2 \leqq (b + 1)^6,$$
$$b^6 \geqq c^{30}, \qquad (b + 1)^6 \leqq (c + 1)^{30},$$

d'où, en ajoutant,

$$N \geqq c^{30}, \qquad N + 1 \leqq (c + 1)^{30},$$

ou

$$c^{30} \leqq N < (c + 1)^{30}.$$

Le nombre N est donc égal ou supérieur à c^{30}, mais il est moindre que $(c + 1)^{30}$: donc c est la racine trentième entière de N.

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour extraire une racine entière d'un nombre entier, dans le cas où le degré de cette racine est le produit de plusieurs nombres, on extrait du

nombre donné une racine de degré égal au premier facteur; puis, de la racine entière trouvée, une racine de degré égal au second facteur, et ainsi de suite : la dernière racine entière obtenue est la racine entière du nombre donné.

Il suit de là qu'on peut, par de simples extractions de racines carrées ou cubiques, trouver les racines quatrième, sixième, huitième, neuvième, douzième, seizième, dix-huitième, etc., des nombres entiers.

Soit proposé, par exemple, d'extraire la racine douzième entière de 618847.

Le degré 12 de la racine étant le produit des nombres 2, 2, 3, on extrait la racine carrée entière de 618847, laquelle est 786; puis la racine carrée entière de 786, laquelle est 28; puis la racine cubique entière de 28, laquelle est 3 : **3** est la racine douzième entière du nombre 618847.

CHAPITRE VIII

RECHERCHE DE L'EXPOSANT

111. L'*exponentation* est une *opération qui a pour but de chercher combien de fois un nombre donné,* nommé *base, est facteur d'un autre nombre donné.*

Exponenter 64 par 4, par exemple, c'est chercher combien de fois 4 est facteur de 64.

On indique l'exponentation par le signe ÷, que l'on énonce *exponenté par*. Ainsi 64 ÷ 4 = 3 se lit : 64 *exponenté par* 4 *égale* 3.

112. Il est évident que le nombre cherché est le degré de la puissance à laquelle il faut élever la base pour avoir le nombre donné.

L'exponentation est donc une deuxième opération *inverse* de l'élévation aux puissances (**82**), et on peut encore la définir : *l'opération par laquelle, connaissant un nombre,* nommé *base* ou *racine, et une puissance de ce nombre, on cherche le degré de cette puissance.*

De là vient le nom d'*exponentation,* ou *recherche de l'exposant,* donné à cette opération.

***113.** Soit proposé, par exemple, d'exponenter 24137569 par 17.

On divisera 24137569 par 17, puis le quotient obtenu par 17, le nouveau quotient encore par 17, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait 1 pour quotient : le nombre des divisions est 6, et, par suite, on a : $24137569 \div 17 = \mathbf{6}$.

On peut aussi, d'après la deuxième définition, former les puissances successives de la racine. On trouve $17^6 = 24137569$, et, par suite, on a : $24137569 \div 17 = \mathbf{6}$.

***114.** Dans cet exemple, le reste de chaque division est 0 et le quotient de la dernière division est 1. Il ne peut en être ainsi que lorsque le nombre donné est une puissance parfaite de la racine donnée.

Lorsque le nombre donné n'est pas une puissance parfaite de la racine, on le divise encore par la racine, puis le quotient entier aussi par la racine, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait un quotient moindre que la racine : le nombre des divisions effectuées est *le degré de la plus grande puissance de la racine contenue dans le nombre donné.* Ce degré est appelé *exposant entier*, et l'excès du nombre sur la plus grande puissance de la racine qu'il renferme est appelé le *reste* de l'opération.

***115.** Soit proposé, par exemple, d'exponenter 10000 par 13.

On divise 10000 par 13 : le quotient entier est 769 et le reste 3; on divise 769 par 13 : le quotient entier est 59 et le reste 2; on divise 59 par 13 : le quotient entier est 4, nombre moindre que 13, et le reste 7.

On a fait 3 divisions : donc **3** est l'*exposant entier*, c'est-à-dire le degré de la plus grande puissance de 13 contenue dans 10000, et le *reste* de l'opération est 10000 moins 13^3 ou **7803**.

En effet, de la suite d'opérations que l'on a effectuées, on conclut (**80***) que le quotient entier de 10000 par 13^3 est 4, et, par suite, que 10000 est compris entre 4.13^3 et 5.13^3, et, à plus forte raison, entre 13^3 et 13^4 : donc 13^3 est la plus grande puissance de 13 contenue dans 10000.

On peut aussi, d'après la deuxième définition, former les puissances successives de la racine. On trouve $13^3 = 2197$ et $13^4 = 28561$. Donc 10000 est compris entre 13^3 et 13^4. Par suite, **3** est l'*exposant entier*, et le *reste* de l'opération est 10000 moins 2197 ou **7803**.

CHAPITRE IX

DE QUELQUES PROCÉDÉS DE CALCUL RAPIDE

116. Il existe, pour effectuer certaines opérations, des procédés particuliers de calcul, conduisant aux résultats plus rapidement que les règles ordinaires. On nous saura gré de faire connaître ici quelques-uns de ces procédés.

1° Pour obtenir le produit de deux nombres, il est quelquefois avantageux de décomposer l'un de ces nombres en d'autres dont chacun soit une partie très simple du précédent.

Ainsi, pour multiplier un nombre par 1875, ou par 1000 + 500 + 250 + 125, on le multiplie d'abord par 1000; puis par 500, en prenant la moitié du produit précédent; puis par 250, en prenant la moitié du produit précédent; puis par 125, en prenant la moitié du produit précédent : la somme des quatre produits partiels est le produit cherché.

Ce procédé a reçu le nom de *méthode des parties aliquotes* (**236,478**).

2° Il peut aussi être avantageux de décomposer le multiplicateur ou le multiplicande en deux facteurs, dont l'un soit un nombre très simple.

Pour multiplier, par exemple, un nombre quelconque par 468, on le multiplie par 234, et le produit obtenu par 2.

Pour multiplier un nombre par 3096, on le multiplie par 1032, et le produit obtenu par 3.

Pour multiplier 633 542 par un nombre quelconque, on multiplie 90 506 par ce nombre, et le produit obtenu par 7.

On peut opérer de la même manière pour simplifier la division.

Ainsi, pour diviser un nombre par 468, 3096 ou 633 542, on peut le diviser respectivement par 234, 1032 ou 90 506, puis le quotient obtenu respectivement par 2, 3 ou 7.

3° D'autres fois, on regarde le multiplicateur ou le multiplicande ou le diviseur comme étant le quotient de deux nombres très simples.

Ainsi, pour multiplier un nombre par 5, 25, 125, 625,... ou par 10 : 2, 100 : 4, 1000 : 8, 10000 : 16,... on écrit 1, 2, 3, 4... zéros à sa droite, et on divise par 2, 4, 8, 16... le nombre ainsi obtenu.

On a, par exemple, 347 × 125 = 347000 : 8 = **43375**.

De même, pour diviser un nombre par 5, 25, 125, 625,... on le multiplie par 2, 4, 8, 16,... et on sépare 1, 2, 3, 4... chiffres sur la droite du produit obtenu : la partie à gauche est le quotient cherché, et le reste s'obtient en divisant la partie à droite par 2, 4, 8, 16...

Pour diviser, par exemple, 106789 par 25, on multiplie ce nombre par 4, et on sépare deux chiffres sur la droite du produit 427156 : le quotient cherché est **4271**, et le reste est 56 : 4 ou **14**.

4° Soit à multiplier un nombre quelconque par 986432.

Pour obtenir les produits partiels successifs par 2, 3, 4, 6, 8, 9, on multipliera le nombre par 2, puis par 3; puis le premier produit par 2, et le deuxième aussi par 2; puis le troisième produit encore par 2, et le deuxième par 3.

Pour multiplier un nombre par 234689, on procéderait de la même manière, en commençant l'opération par la gauche du multiplicateur.

5° Pour multiplier un nombre par 99, 897, 998, 999, 2999, 83999, etc., on le multiplie par les différences 100 — 1, 900 — 3, 1000 — 2, 1000 — 1, 3000 — 1, 84000 — 1, etc.

On a, par exemple, 1897 × 999 = 1897000 — 1897 = **1895103**.

6° Pour diviser un nombre par 99, 897, 998, 999, 2999, 83999, etc., on détermine, par la méthode ordinaire, les chiffres successifs du quotient; on multiplie chaque chiffre par le complément du diviseur, ou par 1, 103, 2,1, 7001, 16001, etc.; on ajoute le produit au dividende partiel correspondant, et on supprime le premier chiffre à gauche de la somme obtenue; en d'autres termes, on opère la division par la *méthode des compléments* (**76**).

CHAPITRE X

NOMBRE ET NATURE DES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES

117. La plus simple des opérations arithmétiques est l'*addition,* qui a pour objet de réunir en un seul plusieurs nombres donnés.

La *multiplication* n'est autre chose que l'addition de plusieurs nombres, tous égaux entre eux.

L'*élévation aux puissances* n'est autre chose que la multiplication de plusieurs nombres, tous égaux entre eux.

L'addition, la multiplication et l'élévation aux puissances sont les trois opérations *directes* de l'arithmétique.

On a : $4 + 3 = 3 + 4$, c'est-à-dire que la somme de deux nombres ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces nombres. Il existe donc une seule opération *inverse* de l'addition, savoir, la *soustraction,* qui a pour objet, connaissant la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre.

On a aussi : $4 \times 3 = 3 \times 4$, c'est-à-dire que le produit de deux nombres ne change pas quand on intervertit l'ordre de ces nombres. Il existe donc une seule opération *inverse* de la multiplication, savoir, la *division,* qui a pour objet, connaissant le produit de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre.

Mais 4^3 n'est pas égal à 3^4. On ne peut donc, dans l'élévation d'un nombre à une certaine puissance, intervertir ce nombre et le degré de la puissance. Il suit de là qu'il existe deux opérations *inverses* de l'élévation aux puissances, savoir, l'*extraction des racines,* qui a pour objet, connaissant une puissance d'un nombre et le degré de cette puissance, de trouver ce nombre, et l'*exponentation,* ou *recherche de l'exposant,* qui a pour objet, connaissant un nombre et une puissance de ce nombre, de trouver le degré de cette puissance.

Il suit, de ce qui précède, qu'*il y a sept opérations arithmétiques, dont trois directes et quatre inverses.*

CHAPITRE XI

DES DIVERS SYSTÈMES DE NUMÉRATION

***118.** On dit que la *base d'un système de numération* est B, lorsque B unités d'un ordre quelconque forment une unité de l'ordre immédiatement supérieur.

Suivant que la base est *deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, douze*, le système de numération est appelé *binaire, ternaire, quaternaire* ou *tétractique, quinaire, sénaire, septénaire, octaval, nonal, décimal* ou *décadique, duodécimal.*

***119.** Pour écrire un nombre dans le système de numération dont la base est B, on commence par adopter B — 1 caractères, destinés à représenter les B — 1 premiers nombres. Ces caractères sont les chiffres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, *a*, *b*, *c*, *d*, etc.,

que l'on énonce :

un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, a, bé, cé, dé, etc.

On fait ensuite cette convention fondamentale, qu'*un chiffre, placé à la gauche d'un autre, représente des unités de l'ordre immédiatement supérieur.*

Pour tenir la place des unités des ordres qui peuvent manquer, on emploie le caractère 0, appelé *zéro.*

Le nombre des chiffres employés est ainsi égal à la base du système.

Enfin, on convient d'appeler *unité simple, dizaine, centaine, mille, dizaine de mille, centaine de mille, million,* etc., l'unité du premier, du deuxième, du troisième, du quatrième, du cinquième, du sixième, du septième ordre, etc., comme dans le système décimal (*).

(*) Cette méthode de *numération parlée,* proposée par nous en 1885, a été adoptée par E. Lucas, dans sa *Théorie des nombres,* tome premier, Paris 1891, page 42.

D'après ces conventions, la manière de lire un nombre écrit en chiffres est la même, *quel que soit le système de numération dans lequel est écrit ce nombre.* Ainsi les nombres

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 1*a*, 1*b*, etc.,

écrits dans n'importe quel système de numération, se lisent : *dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize, dix-sept, dix-huit, dix-neuf, dix*-a, *dix*-b, etc.; les nombres

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, *a*0, *b*0, etc.,

se lisent : *dix, vingt, trente, quarante, cinquante, soixante, septante* ou *soixante-dix, octante* ou *quatre-vingts, nonante* ou *quatre-vingt-dix,* a-*dix,* b-*dix,* etc.; les nombres

aa, *abc*, 8*ac*0, *b*6*a*72*c*, 100*d*000000,

se lisent : a-*dix* a; a-*cent* b-*dix* c; *huit mille* a-*cent* c-*dix;* b-*cent soixante*-a *mille sept cent vingt*-c; *un milliard* d *millions.*

***120.** Les règles des opérations, démontrées pour les nombres écrits dans le système décimal, sont les mêmes pour les nombres écrits dans un système quelconque de numération.

Pour opérer rapidement dans un système quelconque de numération, il est indispensable de savoir par cœur *toutes les sommes et tous les produits de deux nombres d'un seul chiffre.*

***121.** Problème I. *Un nombre étant écrit dans un certain système de numération, l'écrire dans le système décimal.*

Soit proposé, par exemple, d'écrire, dans le système décimal, le nombre 6*a*709, écrit dans le système duodécimal.

On dira : 6 unités du cinquième ordre valent 12 × 6 ou 72 unités du quatrième ordre, 72 et *a* ou 10 font 82; 82 unités du quatrième ordre valent 12 × 82 ou 984 unités du troisième ordre, 984 et 7 font 991; 991 unités du troisième ordre valent 12 × 991 ou 11892 unités du deuxième ordre; 11892 unités du deuxième ordre valent 12 × 11892 ou 142704 unités du premier ordre, 142704 et 9 font 142713. On a donc

$$6a709_{12} = \mathbf{142713}_{10}.$$

***122.** Problème II. *Un nombre étant écrit dans le système décimal, l'écrire dans un autre système, dont la base est donnée.*

Soit proposé, par exemple, d'écrire, dans le système duodécimal, le nombre 142713, écrit dans le système décimal.

142713	12			
22	11892	12		
107	109	991	12	
111	12	31	82	12
33	**0**	**7**	**10**	**6**
9				

On dira : 142713 unités simples valent 142713 : 12 ou 11892 unités du deuxième ordre, base 12, et il reste **9** unités simples; 11892 unités du deuxième ordre valent 11892 : 12 ou 991 unités du troisième ordre, et il reste **0**; 991 unités du troisième ordre valent 991 : 12 ou 82 unités du quatrième ordre, et il reste **7** unités du troisième ordre; 82 unités du quatrième ordre valent 82 : 12 ou **6** unités du cinquième ordre, et il reste **10** ou **a** unités du quatrième ordre.

Ainsi le nombre 142713 renferme **6** unités du cinquième ordre, base 12, **10** ou **a** du quatrième ordre, **7** du troisième ordre et **9** du premier ordre. On a donc

$$142713_{10} = \mathbf{6a709}_{12}.$$

***123.** Problème III. *Un nombre étant écrit dans un certain système de numération, l'écrire dans un autre système, dont la base est donnée.*

Soit proposé, par exemple, d'écrire, dans le système duodécimal, le nombre 42750, écrit dans le système octaval.

On écrira d'abord le nombre 42750 dans le système décimal : on trouve (**121**) 17896; puis on écrira le nombre 17896 dans le système duodécimal : on trouve (**122**) **a434**.

LIVRE DEUXIÈME

LES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES NOMBRES ENTIERS

—

CHAPITRE I

CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ

124. On dit qu'un nombre est *multiple* d'un autre nombre, quand il est le produit de celui-ci par un nombre entier.

Réciproquement, on dit que le second nombre est *sous-multiple* ou *facteur* du premier (*).

Ainsi 24 est un multiple de 6, parce que 24 égale 6×4. Réciproquement, 6 est un sous-multiple ou un facteur de 24.

Pour indiquer qu'un nombre 24 est multiple d'un autre nombre 6, on écrit :

$$24 = \mathfrak{M}\,6,$$

et on lit : 24 *égale un multiple de* 6.

On dit qu'un nombre est *divisible* par un autre nombre, lorsque la division du premier par le second se fait *exactement*, c'est-à-dire *sans reste*.

Réciproquement, on dit que le second nombre *divise* le premier, ou qu'il est un *diviseur* ou une *partie aliquote* du premier.

Ainsi 24 est divisible par 6, et, réciproquement, 6 divise 24, ou est un diviseur ou une partie aliquote de 24.

(*) En particulier, on dit qu'un nombre est *double, triple, quadruple, quintuple, sextuple, septuple, octuple, nonuple, décuple, duodécuple, centuple* d'un autre nombre, lorsqu'il est le produit de celui-ci par 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 100. Réciproquement, le second nombre est dit *sous-double, sous-triple, sous-quadruple*, etc., du premier.

On voit :

1° Que tout *multiple* d'un nombre est *divisible* par ce nombre, et, réciproquement, que tout nombre *divisible* par un autre nombre est un *multiple* de celui-ci;

2° Que les mots *sous-multiple, facteur, diviseur* et *partie aliquote* ont la même signification;

3° Que *tout nombre est divisible par lui-même et par l'unité,* et que *tout multiple de zéro est égal à zéro;*

4° Enfin, qu'*un produit de plusieurs nombres est divisible par l'un quelconque de ses facteurs* (**79**) (*).

125. Théorème I. *Lorsqu'un nombre divise toutes les parties d'une somme, il divise cette somme;* en d'autres termes, *la somme de plusieurs multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre.*

Ainsi 7, divisant les nombres 14, 28, 35, divise leur somme $14 + 28 + 35$.

En effet, 7 divisant 14, 14 est égal à un nombre entier de fois 7, savoir, à 2 fois 7; 7 divisant 28, 28 est égal à un nombre entier de fois 7, savoir, à 4 fois 7; 7 divisant 35, 35 est égal à un nombre entier de fois 7, savoir, à 5 fois 7 : la somme $14 + 28 + 35$ est donc égale à 2 fois plus 4 fois plus 5 fois ou à 11 fois 7 : donc cette somme est divisible par 7.

On peut dire encore, en représentant les nombres par des lettres :

Supposons que le nombre d divise les nombres a, b, c, et appelons m, n, p les quotients; on aura

$$a = dm, \quad b = dn, \quad c = dp,$$

d'où (**40**)

$$a + b + c = dm + dn + dp = d(m + n + p) :$$

(*) On dit que deux nombres sont *congrus* pour un certain *diviseur* ou *module,* lorsqu'ils ont pour différence un multiple de ce module.

Par exemple, les nombres 60 et 32 sont congrus pour le module 7, parce que leur différence 28 est un multiple de 7.

Pour exprimer cette relation, on écrit :

$$60 \equiv 32 \text{ (mod. 7)},$$

et on lit : 60 *congru à* 32, *module* 7.

donc la somme $a + b + c$ est un multiple de d, ou, en d'autres termes, d divise la somme $a + b + c$.

126. Théorème II. *Lorsqu'une somme est composée de deux parties, dont l'une est divisible par un certain nombre, la seconde partie et la somme, divisées par ce nombre, donnent le même reste.*

Soit, par exemple, la somme 60 des deux nombres 35 et 25, dont l'un, 35, admet le diviseur 7 : je dis que le reste de la division de 60 par 7 est le même que le reste de la division de 25 par 7.

En effet, soit 4 le reste de la division de 25 par 7 et 3 le quotient entier : 25 sera égal à 3 fois 7, plus 4. D'ailleurs, 35, étant divisible par 7, est égal à un nombre entier de fois 7, savoir, à 5 fois 7. Donc la somme 35 + 25 ou 60 est égale à 5 fois 7, plus 3 fois 7, plus 4, ou à 8 fois 7, plus 4. Si donc on divise 60 par 7, le reste de la division sera 4.

On peut dire encore :

Soit s la somme de deux nombres a et b, dont l'un a est divisible par d : je dis que la somme s et le nombre b, divisés par d, donneront le même reste.

En effet, a étant divisible par d, soit m le quotient; on aura $a = dm$. Soient aussi n le quotient de b par d, et r le reste; on aura $b = dn + r$. Par suite,

$$s = a + b = dm + dn + r = d(m + n) + r :$$

donc, si on divise s par d, le quotient entier sera $m + n$, et le reste r, ce qu'il fallait démontrer.

127. Théorème III. *Lorsqu'une somme est composée de deux parties, dont l'une est divisible par un certain nombre, pour que la somme elle-même soit divisible par ce nombre, il faut et il suffit que la seconde partie le soit.*

Cette condition est *nécessaire;* car, comme on vient de le voir, si la seconde partie, divisée par le nombre, donne un certain reste, la somme, divisée par ce nombre, donnera le même reste (**126**).

Cette condition est *suffisante;* car on a vu que, si les deux parties d'une somme sont divisibles par un certain nombre, la somme elle-même est divisible par ce nombre (**125**).

128. Théorème IV. *Tout nombre, qui en divise deux autres, divise leur différence;* en d'autres termes, *la différence de deux multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre.*

Ainsi 7, divisant les nombres 35 et 21, divise leur différence 35 — 21.

En effet, 7 divisant 35, 35 est égal à un nombre entier de fois 7, savoir, à 5 fois 7; 7 divisant 21, 21 est égal à un nombre entier de fois 7, savoir, à 3 fois 7 : donc la différence 35 — 21 est égale à 5 fois moins 3 fois ou à 2 fois 7 : donc cette différence est divisible par 7.

*On peut dire encore :

Supposons que le nombre d divise les nombres a et b; appelons m et n les quotients; on aura $a = dm$, $b = dn$, et, par suite,

$$a - b = dm - dn = d(m - n) :$$

donc la différence $a - b$ est un multiple de d, ou, en d'autres termes, d divise la différence $a - b$.

129. Théorème V. *Tout nombre, qui divise une somme et l'une des deux parties de cette somme, divise l'autre partie.*

En effet, la seconde partie de la somme peut être considérée comme la différence entre cette somme et l'autre partie (**26**). Or on vient de voir que, si un nombre en divise deux autres, il divise leur différence (**128**).

130. Théorème VI. *Tout nombre, qui divise un autre nombre, divise les multiples de celui-ci.*

Ainsi 7, divisant 28, divise les multiples de 28, c'est-à-dire le produit de 28 par un nombre quelconque m.

En effet, $28 \times m$ est la somme de m nombres égaux à 28. Or 7 divise chaque partie 28 de cette somme. Donc il divise la somme (**125**).

131. Théorème VII. *Tout nombre, divisible par un autre nombre, est divisible par les sous-multiples de celui-ci.*

Ainsi tout nombre N, divisible par 12, est aussi divisible par 2, par 3, par 4 et par 6, qui sont des sous-multiples de 12.

En effet, le nombre N, étant divisible par 12, est un multiple de 12. Or les nombres 2, 3, 4, 6, divisant 12, divisent tous les multiples de 12 (**130**).

Donc ils divisent N, ou, en d'autres termes, N est divisible par chacun de ces nombres.

132. On appelle *caractère de divisibilité* la condition *nécessaire* et *suffisante* pour qu'un nombre soit divisible par un diviseur donné (*).

Il n'est utile de considérer que les caractères de divisibilité dont l'emploi est plus simple que l'effectuation même de la division.

Les caractères de divisibilité que nous allons établir sont basés principalement sur les théorèmes III et VII.

Divisibilité par 2 et 5, 4 et 25, 8 et 125.

133. *Un nombre est divisible par* 2 *ou par* 5 *lorsque le chiffre de ses unités est divisible par* 2 *ou par* 5.

En effet, *tout nombre entier est égal à un multiple de* 10, *augmenté du chiffre de ses unités*. Ainsi 435 est égal à 430 + 5, ou à un multiple de 10, plus 5.

Or, de ces deux parties du nombre, la première, qui est un multiple de 10, est divisible par 2 et par 5, qui sont des diviseurs de 10 (**131**).

Donc, pour qu'un nombre soit divisible par 2 ou par 5, il faut et il suffit que la seconde partie, ou le chiffre des unités du nombre, soit divisible par 2 ou par 5 (**127**).

Il suit de là :

1° Qu'*un nombre est divisible par* 2 *lorsqu'il est terminé par l'un des chiffres* 0, 2, 4, 6 *ou* 8;

2° Qu'*un nombre est divisible par* 5 *lorsqu'il est terminé par* 0 *ou par* 5.

Lorsqu'un nombre n'est pas divisible par 2 ou par 5, le reste de sa division par 2 ou par 5 est égal au reste de la division par 2 ou par 5 de son dernier chiffre à droite (**126**).

(*) Quand on dit, par exemple : *Un nombre est divisible par* 2, *lorsque le chiffre de ses unités est divisible par* 2, il faut entendre cette proposition *dans un sens exclusif*; c'est-à-dire : *Un nombre est divisible par* 2, *lorsque le chiffre de ses unités est divisible par* 2, *et il n'est pas divisible par* 2, *lorsque le chiffre de ses unités n'est pas divisible par* 2; en d'autres termes, la condition énoncée n'est pas seulement *suffisante*, elle est aussi *nécessaire*.

134. On appelle *pairs* les nombres divisibles par 2, et *impairs* les nombres non divisibles par 2.

Dans la suite des nombres naturels, les nombres pairs et les nombres impairs se succèdent alternativement.

*On appelle *pairement pairs* les nombres divisibles par 4; *impairement pairs*, les nombres divisibles par 2 et non par 4; *pairement impairs*, les nombres qui, diminués de 1, sont pairement pairs, et, enfin, *impairement impairs*, les nombres qui, diminués de 1, sont impairement pairs (*).

135. *Un nombre est divisible par 4 ou par 25 lorsque ses deux derniers chiffres à droite forment un nombre divisible par 4 ou par 25.*

En effet, *tout nombre entier est égal à un multiple de* 100, *augmenté du nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite.* Ainsi 728 est égal à 700 + 28, ou à un multiple de 100, plus 28.

Or, de ces deux parties du nombre, la première, qui est un multiple de 100, est divisible par 4 et par 25, qui sont des diviseurs de 100 (**131**).

Donc, pour qu'un nombre soit divisible par 4 ou par 25, il faut et il suffit que la seconde partie, ou le nombre formé par les deux derniers chiffres à droite, soit divisible par 4 ou par 25 (**127**) (**).

Lorsqu'un nombre n'est pas divisible par 4 ou par 25, le reste de sa division par 4 ou par 25 est égal au reste de la division par 4 ou par 25 du nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite (**126**).

136. *Un nombre est divisible par 8 ou par 125 lorsque ses trois derniers chiffres à droite forment un nombre divisible par 8 ou par 125.*

Et ainsi de suite.

(*) En d'autres termes, les nombres sont *pairs* ou *impairs*, suivant que le reste de leur division par 2 est 0 ou 1, ou suivant qu'ils sont de la forme $2n$ ou $2n + 1$, n désignant un nombre entier quelconque.

De même, les nombres sont *pairement pairs*, *pairement impairs*, *impairement pairs* ou *impairement impairs*, suivant que le reste de leur division par 4 est 0, 1, 2 ou 3, ou suivant qu'ils sont de la forme $4n$, $4n + 1$, $4n + 2$ ou $4n + 3$.

(**) On peut dire encore : *Un nombre est divisible par 4 lorsqu'il est terminé par un chiffre pairement pair, précédé d'un chiffre pair, ou par un chiffre impairement pair, précédé d'un chiffre impair.*

Divisibilité par 3 et par 9.

137. Les conditions de divisibilité par 3 et par 9 reposent sur le théorème suivant, que nous allons d'abord démontrer :

Tout nombre entier est égal à un multiple de 9, *augmenté de la somme de ses chiffres.*

En premier lieu, *un nombre formé de l'unité, suivie d'un ou de plusieurs zéros, est un multiple de* 9, *augmenté de l'unité.*

On a, en effet,

$$\begin{aligned} 10 &= 9 + 1, \\ 100 &= 99 + 1 = \mathfrak{M}\, 9 + 1, \\ 1000 &= 999 + 1 = \mathfrak{M}\, 9 + 1, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

En second lieu, *un nombre formé d'un chiffre quelconque, suivi d'un ou de plusieurs zéros, est un multiple de* 9, *augmenté de ce chiffre.*

On a, par exemple, $4000 = \mathfrak{M}\, 9 + 4$.

En effet, le nombre 4000 égale 4 fois 1000. Or 1000 est un multiple de 9, plus 1. Donc 4000 égale 4 fois un multiple de 9, plus 4 fois 1, ou (**130**) un multiple de 9, plus 4.

Ce raisonnement peut s'écrire comme il suit :

$$4000 = 1000.4 = (\mathfrak{M}\, 9 + 1).4 = \mathfrak{M}\, 9.4 + 1.4 = \mathfrak{M}\, 9 + 4.$$

Soit maintenant un nombre quelconque, 7524, par exemple.

On a

$$7524 = 7000 + 500 + 20 + 4.$$

Or

$$\begin{aligned} 7000 &= \mathfrak{M}\, 9 + 7, \\ 500 &= \mathfrak{M}\, 9 + 5, \\ 20 &= \mathfrak{M}\, 9 + 2, \\ 4 &= 4. \end{aligned}$$

Donc, puisqu'une somme de multiples de 9 est encore un multiple de 9 (**125**),

$$7524 = \mathfrak{M}\, 9 + 7 + 5 + 2 + 4.$$

138. Cela posé, nous pouvons établir le caractère suivant de divisibilité par 3 ou par 9 :

Un nombre est divisible par 3 *ou par* 9 *lorsque la somme de ses chiffres est divisible par* 3 *ou par* 9.

En effet, comme on vient de le voir, *tout nombre entier est égal à un multiple de* 9, *augmenté de la somme de ses chiffres.*

Or, de ces deux parties du nombre, la première, qui est un multiple de 9, est divisible par 3 et par 9 (**131**).

Donc, pour qu'un nombre soit divisible par 3 ou par 9, il faut et il suffit que la seconde partie, ou la somme des chiffres du nombre, soit divisible par 3 ou par 9 (**127**).

Lorsqu'un nombre n'est pas divisible par 3 ou par 9, le reste de sa division par 3 ou par 9 est égal au reste de la division par 3 ou par 9 de la somme de ses chiffres (**126**).

Nous ferons connaître, dans le chapitre suivant, une méthode expéditive pour calculer le reste de la division d'un nombre entier par 9, ainsi que l'application de cette méthode à la vérification des opérations sur les nombres entiers.

Divisibilité par 11.

139. La condition de divisibilité par 11 repose sur le théorème suivant, que nous allons d'abord démontrer :

Tout nombre entier est égal à un multiple de 11, *augmenté de la somme de ses chiffres d'ordre impair, et diminué de la somme de ses chiffres d'ordre pair.*

En premier lieu, *un nombre formé de l'unité, suivie d'un nombre pair de zéros, est un multiple de* 11, *augmenté de l'unité;* et *un nombre formé de l'unité, suivie d'un nombre impair de zéros, est un multiple de* 11, *diminué de l'unité.*

On a, en effet,

$$100 = 99 + 1 = \mathfrak{M}\,11 + 1,$$
$$10\,000 = 9\,999 + 1 = \mathfrak{M}\,11 + 1,$$
$$1\,000\,000 = 999\,999 + 1 = \mathfrak{M}\,11 + 1,$$

et ainsi de suite; et, de même,

$$10 = 11 - 1,$$
$$1000 = 990 + 10 = 990 + 11 - 1 = \mathfrak{M}\, 11 - 1,$$
$$10000 = 99990 + 10 = 99990 + 11 - 1 = \mathfrak{M}\, 11 - 1,$$

et ainsi de suite.

En second lieu, *un nombre formé d'un chiffre quelconque, suivi d'un nombre pair de zéros, est un multiple de* 11, *augmenté de ce chiffre;* et *un nombre formé d'un chiffre quelconque, suivi d'un nombre impair de zéros, est un multiple de* 11, *diminué de ce chiffre.*

On a, par exemple, $500 = \mathfrak{M}\, 11 + 5$, et $5000 = \mathfrak{M}\, 11 - 5$.

En effet, le nombre 500 égale 5 fois 100. Or 100 est un multiple de 11, plus 1. Donc 500 égale 5 fois un multiple de 11, plus 5 fois 1, ou (**130**) un multiple de 11, plus 5.

De même, le nombre 5000 égale 5 fois 1000. Or 1000 est un multiple de 11, moins 1. Donc 5000 égale 5 fois un multiple de 11, moins 5 fois 1, ou (**130**) un multiple de 11, moins 5.

Soit maintenant un nombre quelconque, 83649, par exemple.

On a

$$83649 = 80000 + 3000 + 600 + 40 + 9.$$

Or

$$9 = 9,$$
$$40 = \mathfrak{M}\, 11 - 4,$$
$$600 = \mathfrak{M}\, 11 + 6,$$
$$3000 = \mathfrak{M}\, 11 - 3,$$
$$80000 = \mathfrak{M}\, 11 + 8.$$

Donc, puisqu'une somme de multiples de 11 est encore un multiple de 11 (**125**),

$$83649 = \mathfrak{M}\, 11 + 9 + 6 + 8 - 4 - 3,$$

ou (**35**)

$$83649 = \mathfrak{M}\, 11 + (9 + 6 + 8) - (4 + 3).$$

140. Cela posé, nous pouvons établir le caractère suivant de divisibilité par 11 :

Un nombre est divisible par **11** *lorsque l'excès de la somme de ses chiffres d'ordre impair sur celle de ses chiffres d'ordre pair est divisible par* **11**.

En effet, comme on vient de le voir, *tout nombre entier est égal à un multiple de* **11**, *augmenté de la somme de ses chiffres d'ordre impair, et diminué de la somme de ses chiffres d'ordre pair.*

Or, de ces deux parties du nombre, la première est divisible par 11.

Donc, pour qu'un nombre soit divisible par **11**, il faut et il suffit que la seconde partie, ou l'excès de la somme des chiffres d'ordre impair sur la somme des chiffres d'ordre pair, soit divisible par **11** (**127**).

Lorsqu'un nombre n'est pas divisible par **11**, le reste de sa division par **11** est égal au reste de la division par **11** de l'excès de la somme de ses chiffres d'ordre impair sur celle de ses chiffres d'ordre pair (**126**).

Lorsque la somme des chiffres d'ordre pair surpasse la somme des chiffres d'ordre impair, on ajoute à celle-ci, ou on retranche de celle-là un multiple convenable de **11** (*).

Recherche des caractères de divisibilité (**).

***141.** Il existe des méthodes générales pour trouver des caractères de divisibilité par un diviseur quelconque. Nous allons exposer ici deux de ces méthodes.

(*) Nous signalons plus loin (**147** et **181**) d'autres caractères de divisibilité, auxquels nous ajoutons les suivants, en général plus curieux qu'utiles :

1° Un nombre est divisible par **4** lorsque la différence entre le chiffre de ses unités et le double du chiffre de ses dizaines est divisible par 4 ;

2° Un nombre est divisible par **6** lorsque la différence entre le chiffre de ses unités et le double de la somme des autres chiffres est divisible par 6 ;

3° Un nombre est divisible par **8** lorsque le chiffre de ses unités, plus deux fois le chiffre de ses dizaines, plus ou moins quatre fois le chiffre de ses centaines, est divisible par 8;

4° Un nombre est divisible par **12** lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite, ajouté à quatre fois la somme des autres chiffres, donne un nombre divisible par 12;

5° Un nombre est divisible par **15**, **18** ou **45**, lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite, ajouté à dix fois la somme des autres chiffres, donne un nombre divisible par 15, 18 ou 45.

(**) Voir mes deux brochures intitulées : *Caractères de divisibilité*, Paris 1894; *Questions d'Arithmologie,* Huy 1896.

PREMIÈRE MÉTHODE.

142. Soit proposé de trouver un caractère de divisibilité par 40.

Divisons par 40 les puissances successives de 10, c'est-à-dire les nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, etc. Chaque division partielle donnant un reste moindre que 40, *après quarante divisions au plus,* on trouvera un reste nul ou l'un des restes déjà obtenus.

On trouve que 1000 divisé par 40 donne un reste nul.

On en conclut qu'un nombre quelconque peut être décomposé en deux parties, dont l'une, formée du nombre des mille de ce nombre, est toujours divisible par 40; si donc l'autre partie, formée des trois derniers chiffres à droite du nombre, est divisible par 40, le nombre lui-même est divisible par 40.

Ainsi *un nombre est divisible par* 40 *lorsque le nombre formé par ses trois derniers chiffres à droite est divisible par* 40.

143. Soit encore proposé de trouver un caractère de divisibilité par 7.

Divisons par 7 les puissances successives de 10, c'est-à-dire les nombres 1, 10, 100, 1000, 10000, etc. Chaque division partielle donnant un reste moindre que 7, *après sept divisions au plus,* on trouvera un reste nul ou l'un des restes déjà obtenus.

On trouve que le septième reste est 1, c'est-à-dire égal au premier. Par suite, les six premiers restes 1, 3, 2, 6, 4, 5 se reproduisent indéfiniment dans le même ordre.

Il est facile d'en conclure qu'un nombre quelconque est un multiple de 7, plus la somme des produits de ses six premiers chiffres, à partir de la droite, respectivement par 1, 3, 2, 6, 4, 5, plus la somme des produits des six chiffres suivants par les mêmes nombres, et ainsi de suite.

On déduit de là qu'*un nombre est divisible par* 7 *lorsque la somme des produits des chiffres de chacune de ses tranches de six chiffres, à partir de la droite, respectivement par* 1, 3, 2, 6, 4, 5, *est divisible par* 7.

144. Soit proposé, par exemple, de reconnaître si le nombre 377801998952 est divisible par 7.

On peut d'abord, sans changer le reste de la division de ce nombre

par 7, diminuer de 7 chaque chiffre égal ou supérieur à 7, ce qui donne 300101221252. Si maintenant on multiplie les six premiers chiffres de ce nouveau nombre, à partir de la droite, puis les six chiffres suivants, respectivement par 1, 3, 2, 6, 4, 5, en diminuant d'un multiple de 7 chaque produit supérieur à 7, on trouve 100201316412; et si l'on fait la somme des chiffres de ce dernier nombre, en diminuant de 7 chaque somme partielle égale ou supérieure à 7, on obtient 0 : donc le nombre proposé est divisible par 7.

***145.** Si l'on observe que les compléments à 7 des restes 6, 4, 5 sont 1, 3, 2, on conclut encore qu'*un nombre est divisible par* 7, *lorsque l'excès de la somme des produits des chiffres de chacune de ses tranches de trois chiffres de rang impair, à partir de la droite, respectivement par* 1, 3, 2, *sur la somme des produits des chiffres de chacune de ses tranches de trois chiffres de rang pair, par les mêmes nombres, est divisible par* 7.

DEUXIÈME MÉTHODE.

***146.** Cette deuxième méthode repose sur les propositions suivantes, que nous allons d'abord démontrer :

1° *Les nombres* $a^n - 1$, $a^{2n} - 1$, $a^{3n} - 1$, $a^{4n} - 1$, *etc., sont divisibles par* $a^n - 1$.

On a, en effet,

$$a^{2n} - 1 = a^{2n} - a^n + a^n - 1 = a^n(a^n - 1) + (a^n - 1) = \mathfrak{M}(a^n - 1),$$
$$a^{3n} - 1 = a^{3n} - a^{2n} + a^{2n} - 1 = a^{2n}(a^n - 1) + (a^{2n} - 1) = \mathfrak{M}(a^n - 1),$$
$$a^{4n} - 1 = a^{4n} - a^{3n} + a^{3n} - 1 = a^{3n}(a^n - 1) + (a^{3n} - 1) = \mathfrak{M}(a^n - 1),$$

et ainsi de suite.

2° *Les nombres* $a^n + 1$, $a^{2n} - 1$, $a^{3n} + 1$, $a^{4n} - 1$, *etc., sont divisibles par* $a^n + 1$.

On a, en effet,

$$a^{2n} - 1 = a^{2n} + a^n - a^n - 1 = a^n(a^n + 1) - (a^n + 1) = \mathfrak{M}(a^n + 1),$$
$$a^{3n} + 1 = a^{3n} + a^{2n} - a^{2n} + 1 = a^{2n}(a^n + 1) - (a^{2n} - 1) = \mathfrak{M}(a^n + 1),$$
$$a^{4n} - 1 = a^{4n} + a^{3n} - a^{3n} - 1 = a^{3n}(a^n + 1) - (a^{3n} + 1) = \mathfrak{M}(a^n + 1),$$

et ainsi de suite.

147. Cela posé, soit un nombre entier N, écrit dans un système quelconque de numération. Partageons ce nombre en tranches de n chiffres, allant de droite à gauche, la dernière tranche à gauche pouvant avoir moins de n chiffres, et appelons a, b, c, d, e, etc., les nombres formés par ces tranches. On peut écrire le nombre N sous l'une des formes suivantes :

$$N = a + b.10^n + c.10^{2n} + d.10^{3n} + e.10^{4n} + \ldots,$$
$$N = a + b + c + d + e + \ldots$$
$$+ b.(10^n - 1) + c.(10^{2n} - 1) + d.(10^{3n} - 1) + e.(10^{4n} - 1) + \ldots,$$
$$N = a - b + c - d + e - \ldots$$
$$+ b.(10^n + 1) + c.(10^{2n} - 1) + d.(10^{3n} + 1) + e.(10^{4n} - 1) + \ldots$$

Sous la première forme, on voit que le nombre N est égal au nombre formé par ses n derniers chiffres à droite, plus à une suite d'autres nombres, tous divisibles par 10^n. On en conclut qu'*un nombre est divisible par un diviseur de* 10^n, *lorsque le nombre formé par ses* n *derniers chiffres à droite est divisible par ce diviseur*. Ainsi, dans le système duodécimal :

Un nombre est divisible par 2, 3, 4, 6, diviseurs de 10, lorsque son dernier chiffre à droite est divisible par 2, 3, 4, 6;

Un nombre est divisible par 8, 9, 14, 16, diviseurs de 100, lorsque le nombre formé par ses deux derniers chiffres à droite est divisible par 8, 9, 14, 16;

Un nombre est divisible par 23, 28, 46, 54, diviseurs de 1000, lorsque le nombre formé par ses trois derniers chiffres à droite est divisible par 23, 28, 46, 54;

Et ainsi de suite.

Sous la deuxième forme, on voit que le nombre N est égal à la somme de ses tranches de n chiffres, plus à une suite d'autres nombres, tous divisibles par $10^n - 1$ (**146**, 1°). On en conclut qu'*un nombre est divisible par un diviseur de* $10^n - 1$, *lorsque la somme de ses tranches de* n *chiffres est divisible par ce diviseur*. Ainsi, dans le système décimal :

Un nombre est divisible par 3 ou par 9 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3 ou par 9;

Un nombre est divisible par 11, 33, 99, lorsque la somme de ses tranches de deux chiffres est divisible par 11, 33, 99;

Un nombre est divisible par 27, 37, 111, 333, 999, lorsque la somme de ses tranches de trois chiffres est divisible par 27, 37, 111, 333, 999;

Et ainsi de suite.

Sous la troisième forme, on voit que le nombre N est égal à l'excès de la somme de ses tranches de *n* chiffres, de rang impair, sur celle de ses tranches de *n* chiffres, de rang pair, plus à une suite d'autres nombres, tous divisibles par $10^n + 1$ (**146**, 2°). On en conclut qu'*un nombre est divisible par un diviseur de* $10^n + 1$, *lorsque l'excès de la somme de ses tranches de* n *chiffres, de rang impair, sur celle de ses tranches de* n *chiffres, de rang pair, est divisible par ce diviseur*. Ainsi, dans le système décimal :

Un nombre est divisible par 11 lorsque l'excès de la somme de ses chiffres de rang impair sur celle de ses chiffres de rang pair est divisible par 11;

Un nombre est divisible par 101 lorsque l'excès de la somme de ses tranches de deux chiffres, de rang impair, sur celle de ses tranches de deux chiffres, de rang pair, est divisible par 101;

Un nombre est divisible par 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001, lorsque l'excès de la somme de ses tranches de trois chiffres, de rang impair, sur celle de ses tranches de trois chiffres, de rang pair, est divisible par 7, 11, 13, 77, 91, 143, 1001;

Et ainsi de suite.

Recherche des diviseurs d'un nombre.

148. *Pour trouver tous les diviseurs d'un nombre, on le divise par la suite des nombres entiers* 1, 2, 3, 4, 5, *etc., dont les carrés ne le surpassent pas, et on écrit les diviseurs ainsi que les quotients des divisions qui se font exactement.*

On trouve, par exemple, que les diviseurs de 360 sont les suivants :

1,	2,	3,	4,	5,	6,	8,	9,	10,	12,	15,	18,
360,	180,	120,	90,	72,	60,	45,	40,	36,	30,	24,	20.

CHAPITRE II

'REUVES PAR UN DIVISEUR QUELCONQUE DES OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS

149. Théorème I. *Si l'on divise plusieurs nombres par un même liviseur, la somme des nombres et la somme des restes, divisées par le même diviseur, donneront des restes égaux.*

Soient, par exemple, les nombres 489, 669, 4805, qui, divisés par 7, lonnent les restes 6, 4, 3. On aura

$$489 = \mathfrak{M}\, 7 + 6,$$
$$669 = \mathfrak{M}\, 7 + 4,$$
$$4805 = \mathfrak{M}\, 7 + 3,$$

t, par suite (**125**),

$$489 + 669 + 4805 = \mathfrak{M}\, 7 + 6 + 4 + 3.$$

La somme des nombres donnés se compose donc de deux parties, dont une est un multiple de 7, et l'autre, la somme des restes de la division le ces nombres par 7. La première de ces deux parties est divisible par 7. Par conséquent, la somme des nombres et la somme des restes, divisées par 7, donneront des restes égaux (**126**).

150. Théorème II. *Si l'on divise plusieurs nombres par un même diviseur, le produit des nombres et le produit des restes, divisés par le même diviseur, donneront des restes égaux.*

Soient, par exemple, les nombres 489 et 669, qui, divisés par 7, donnent les restes 6 et 4. On aura

$$489 = \mathfrak{M}\, 7 + 6,$$
$$669 = \mathfrak{M}\, 7 + 4,$$

t, par suite (**41**),

$$489.669 = \mathfrak{M}\, 7.\mathfrak{M}\, 7 + 6.\mathfrak{M}\, 7 + \mathfrak{M}\, 7.4 + 6.4,$$

u (**125**)

$$489.669 = \mathfrak{M}\, 7 + 6.4.$$

Le produit des nombres donnés se compose donc de deux parties, dont l'une est un multiple de 7, et l'autre, le produit des restes de la division de ces nombres par 7. La première de ces deux parties est divisible par 7. Par conséquent, le produit des nombres et le produit des restes, divisés par 7, donneront des restes égaux (**126**).

151. Il est facile de déduire, des deux théorèmes qui précèdent, le moyen de faire la preuve par un diviseur quelconque, 7, par exemple, des opérations sur les nombres entiers. Ainsi :

1° *Pour faire la preuve par 7 d'une addition, on cherche les restes de la division par 7 des nombres additionnés : la somme de ces restes et la somme des nombres, divisées par 7, doivent donner le même reste* (**149**);

2° *Pour faire la preuve par 7 d'une soustraction, on cherche les restes de la division par 7 du plus petit nombre et du reste de la soustraction : la somme de ces restes et le plus grand nombre, divisés par 7, doivent donner le même reste* (**36** et **149**);

3° *Pour faire la preuve par 7 d'une multiplication, on cherche les restes de la division par 7 de chaque facteur : le produit de ces restes et le produit des facteurs, divisés par 7, doivent donner le même reste* (**150**);

4° *Pour faire la preuve par 7 d'une division, on cherche les restes de la division par 7 du diviseur, du quotient et du reste, puis au produit des deux premiers restes on ajoute le troisième : la somme obtenue et le dividende, divisés par 7, doivent donner le même reste* (**77** et **150**).

152. Les diviseurs ordinairement employés pour faire la preuve d'une opération sont les nombres 7, 9, 11.

Avec d'autres diviseurs, la vérification est moins sûre ou moins rapide.

Elle est moins sûre, par exemple, avec les diviseurs 2, 4, 5, 25 : car les restes de la division des nombres par l'un de ces diviseurs ne dépendent que du dernier (**133**) ou des deux derniers chiffres à droite de ces nombres (**135**).

Au contraire, les restes de la division des nombres par les diviseurs 3, 6, 7, 9, 11, 12, 13, etc., dépendent de la totalité des chiffres de ces nombres; mais la recherche de ces restes est la plus rapide lorsque le diviseur employé est l'un des nombres 3, 6, 7, 9, 11.

Lorsqu'on fait la preuve d'une opération par un diviseur quelconque, cette preuve ne peut garantir aucune erreur qui serait égale à un multiple du diviseur employé.

Nous allons faire connaître, sous le nom de *méthode du chiffre unique*, une manière expéditive de pratiquer la preuve par 9 des opérations sur les nombres entiers.

153. *Étant donné un ou plusieurs nombres, on fait la somme des chiffres de ces nombres, puis la somme des chiffres de cette somme elle-même, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne une somme d'un seul chiffre :* nous appelons cette dernière somme *chiffre unique* des nombres proposés.

Soient, par exemple, le nombre 9654807, ou les nombres 96, 54, 807. La somme des chiffres 9, 6, 5, 4, 8, 0, 7 est 39 ; la somme des chiffres de 39 est 12, et la somme des chiffres de 12 est 3, nombre d'un seul chiffre : d'après la définition, **3** est le *chiffre unique* du nombre 9654807, ou des nombres 96, 54, 807.

154. On a vu (**137**) que *tout nombre entier est égal à un multiple de* 9, *augmenté de la somme de ses chiffres.*

On déduit de là les propositions suivantes :

1° *Si un nombre est multiple de* 9, *son chiffre unique est égal à* 9 ;

2° *Si un nombre n'est pas multiple de* 9, *son chiffre unique est égal au reste de sa division par* 9 ;

3° *Si deux nombres ont pour différence un multiple de* 9, *leur chiffre unique est le même.*

Cette dernière proposition conduit à la règle suivante :

Dans la recherche du chiffre unique d'un ou de plusieurs nombres : 1° *on peut négliger le chiffre* 9, *ou les chiffres dont la somme fait* 9 ; 2° *quand la somme de plusieurs chiffres est plus grande que* 9, *on peut, par une nouvelle addition, la réduire à un seul chiffre, et continuer l'opération de la même manière.*

155. Il est facile d'appliquer la considération du chiffre unique aux opérations sur les nombres entiers.

1° *Dans l'addition, le chiffre unique de la somme est égal à celui de tous les nombres à additionner.*

```
 41831
 26758
 38068
 ------
106657
```

Soit, par exemple, à vérifier l'addition ci-contre.

Je dis, en commençant par le premier nombre : 4 et 1 **5**, et 8 **13** : mais, au lieu de 13, je dis **4**, somme des chiffres de 13; 4 et 3 **7**, et 1 **8**.

Je continue avec le nombre suivant : 8 et 2 **10**, je dis **1**, 1 et 6 **7**, et 7 **14**, je dis **5**, 5 et 5 **10**, je dis **1**, 1 et 8 **9** : je néglige ce 9.

J'arrive au troisième nombre : 3 et 8 **11**, je dis **2**, 2 et 6 **8**, et 8 **16**, je dis **7** : **7** est le chiffre unique des trois nombres (*).

Or le chiffre unique de la somme 106657 est aussi **7** (**).

2° *Dans la soustraction, le chiffre unique du plus grand nombre est égal à celui du plus petit nombre et du reste.*

```
148991
 70599
 ------
 78392
```

Soit, par exemple, à vérifier la soustraction ci-contre.

Le chiffre unique du plus petit nombre 70599 et du reste 78392 est **5**. Or **5** est aussi le chiffre unique du plus grand nombre 148991.

3° *Dans la multiplication, le chiffre unique du produit est égal à celui du produit des chiffres uniques des facteurs.*

```
  2096
   347
 -----
 14672
 8384
 6288
 ------
727312
```

Soit, par exemple, à vérifier la multiplication ci-contre.

Le chiffre unique du facteur 2096 est 8, celui du facteur 347 est 5. Le produit de 8 par 5 est 40, et le chiffre unique de 40 est **4**. Or le chiffre unique du produit 727312 est aussi **4**.

(*) Plus brièvement : 4 et 1 **5**; et 8 **13**, **4**; et 3 **7**; et 1 **8**; et 2 **10**, **1**; et 6 **7** et 7 **14**, **5**; et 5 **10**, **1**; et 8 **9**; 3 et 8 **11**, **2**; et 6 **8**; et 8 **16**, **7**.

(**) Pour faire la preuve par 11 de la même addition, on ajoute les chiffres d'ordre impair des quatre nombres et les chiffres d'ordre pair de leur somme, en ayant soin, chaque fois qu'une somme de plusieurs chiffres surpasse 11, de diminuer cette somme de 11. On ajoute de la même manière les chiffres d'ordre pair des quatre nombres et les chiffres d'ordre impair de leur somme : cette seconde somme de chiffres doit être égale à la première.

4° *Dans la division, le chiffre unique du dividende est égal à celui du reste et du produit des chiffres uniques du diviseur et du quotient.*

	141
59054	859
846	
67514	**68**
1128	
8642	

Soit, par exemple, à vérifier la division ci-contre. Le chiffre unique du diviseur 859 est 4, celui du quotient 68 est 5. Le produit de 4 par 5 est 20, et le chiffre unique de ce produit 20 et du reste 642 est **5.** Or le chiffre unique du dividende 59054 est aussi **5.**

5° *Dans l'extraction de la racine carrée d'un nombre, le chiffre unique de ce nombre est égal à celui du reste et du carré du chiffre unique de la racine.*

Soit, par exemple, **347** la racine carrée entière du nombre 120725, et **316** le reste.

Le chiffre unique de la racine 347 est 5, dont le carré est 25, et le chiffre unique de ce carré 25 et du reste 316 est **8**. Or **8** est aussi le chiffre unique du nombre 120725.

6° Enfin, *dans l'extraction de la racine cubique d'un nombre, le chiffre unique de ce nombre est égal à celui du reste et du cube du chiffre unique de la racine.*

156. Les propositions qui précèdent offrent une méthode expéditive pour faire la preuve de toutes les opérations sur les nombres entiers.

En effet, on n'a jamais à faire que l'addition ou la multiplication de deux nombres inférieurs à 9.

De plus, dans la multiplication et la division, cette preuve peut être appliquée à chaque produit ou division partielle.

Il faut observer néanmoins que *cette méthode ne peut garantir aucune erreur qui serait égale à un multiple de* 9 (**152** ou **154**, 3°) (*).

(*) L'erreur commise est un multiple de 9 notamment dans les cas suivants : 1° lorsqu'on intervertit l'ordre de deux chiffres, en écrivant, par exemple, 24 au lieu de 42; 2° lorsqu'on écrit 0 pour 9, ou réciproquement; 3° lorsque, dans une multiplication, on n'écrit pas à son rang le premier chiffre d'un produit partiel.

CHAPITRE III

DES NOMBRES PREMIERS

157. *Tout nombre entier qui n'est divisible que par lui-même et par l'unité* est appelé *nombre premier absolu,* ou, simplement, *nombre premier.*

Ainsi les nombres 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, etc., sont premiers (*).

158. Théorème I. *Lorsqu'un nombre n'est pas premier, son plus petit diviseur, autre que l'unité, est un nombre premier.*

Si le nombre N, par exemple, n'est pas premier, il admet un ou plusieurs diviseurs, compris entre 1 et N (**157**). Soit p le plus petit de ces diviseurs : je dis que le nombre p est premier.

En effet, si le nombre p n'était pas premier, il admettrait un ou plusieurs diviseurs, compris entre 1 et p. Mais tout diviseur de p diviserait aussi N, qui est un multiple de p (**130**). Donc N aurait un ou plusieurs diviseurs compris entre 1 et p, et, par suite, p ne serait pas le plus petit diviseur, autre que l'unité, du nombre N, ce qui est contre l'hypothèse.

***159.** Théorème II. *La suite des nombres premiers est illimitée.*

Pour le prouver, il suffit de faire voir que, quelque grand que soit un nombre premier p, il en existe au moins un plus grand.

Formons le produit de tous les nombres premiers de 2 à p, et à ce produit ajoutons 1, ce qui donne

$$2.3.5.7.11.13...p + 1,$$

nombre que nous désignerons par N.

Si ce nombre N est premier, comme il est plus grand que p, le théorème est démontré.

(*) Tout nombre premier, autre que 2 et 3, est égal à un multiple de 6, augmenté ou diminué d'une unité ; mais la réciproque n'est pas vraie.

Si N n'est pas premier, son plus petit diviseur, autre que l'unité, est un nombre premier (**158**). Or ce diviseur n'est aucun des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13,... p; car, si l'on divise N par l'un de ces nombres, par 7, par exemple, le quotient entier est $2.3.5.11.13...p$ et le reste 1. Donc ce diviseur est un nombre premier supérieur à p, ce qui démontre le théorème (*).

*On peut, au lieu d'ajouter, soustraire 1 du produit $2.3.5.7.11.13...p$ (**).

On peut aussi partager la suite des nombres premiers de 1 à p en deux groupes, *d'une manière quelconque*, et considérer la somme ou la différence des deux produits obtenus en multipliant les nombres de chaque groupe : cette somme ou cette différence est un nombre premier plus grand que p, ou admet des diviseurs premiers plus grands que p.

160. Théorème III. *Un nombre est premier lorsqu'il n'est divisible par aucun des nombres premiers dont les carrés sont moindres que lui.*

Soit, par exemple, N un nombre moindre que le carré 289 du nombre premier 17 : je dis que N est premier, s'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à 17.

En effet, si le nombre N n'est pas premier, son plus petit diviseur est un nombre premier (**158**). Ce diviseur, par hypothèse, n'est pas inférieur

---

(*) On a : $1 + 2 = 3$, nombre premier;
$1 + 2.3 = 7$, nombre premier;
$1 + 2.3.5 = 31$, nombre premier;
$1 + 2.3.5.7 = 211$, nombre premier;
$1 + 2.3.5.7.11 = 2311$, nombre premier;
$1 + 2.3.5.7.11.13 = 30031 = 59.509$;
$1 + 2.3.5.7.11.13.17 = 510511 = 19.97.277$;
$1 + 2.3.5.7.11.13.17.19 = 9699691 = 347.27953$;
$1 + 2.3.5.7.11.13.17.19.23 = 223092871 = 317.703763$; etc.

(**) On a : $-1 + 2 = 1$, nombre premier;
$-1 + 2.3 = 5$, nombre premier;
$-1 + 2.3.5 = 29$, nombre premier;
$-1 + 2.3.5.7 = 209 = 11.19$;
$-1 + 2.3.5.7.11 = 2309$, nombre premier;
$-1 + 2.3.5.7.11.13 = 30029$, nombre premier;
$-1 + 2.3.5.7.11.13.17 = 510509 = 61.8369$;
$-1 + 2.3.5.7.11.13.17.19 = 9699689 = 53.197.929$;
$-1 + 2.3.5.7.11.13.17.19.23 = 223092869 = 131.1702999$; etc.

à 17 : il est donc égal ou supérieur à 17. Mais, le nombre N étant moindre que 17 × 17, le quotient de N par un diviseur égal ou supérieur à 17 est moindre que 17. D'ailleurs, ce quotient est aussi un diviseur de N. Donc le nombre N admettrait un diviseur inférieur à 17, ce qui est contre l'hypothèse.

Dans la pratique, *pour reconnaître si un nombre est premier, on le divise par la suite des nombres premiers* 2, 3, 5, 7, 11, 13, *etc., jusqu'à ce qu'on arrive à un quotient égal ou supérieur au diviseur employé : si aucune division n'a donné* 0 *pour reste, le nombre proposé est premier.*

161. Problème. *Construire une table de nombres premiers.*

Soit proposé de former une table renfermant les nombres premiers inférieurs à 150.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		/		/	/	/		/	
2	/	/		/	/	/	/	/	
3		/	/	/	/	/		/	/
4		/		/	/	/		/	/
5	/	/		/	/	/	/	/	
6		/	/	/	/	/		/	/
7		/		/	/	/	/	/	
8	/	/		/	/	/	/	/	
9	/	/	/	/	/	/		/	/
10		/		/	/	/		/	
11	/	/		/	/	/	/	/	/
12	/	/	/	/	/	/		/	/
13		/	/	/	/	/		/	
14	/	/	/	/	/	/	/	/	

Afin de n'avoir pas à écrire les 150 premiers nombres naturels, commençons, comme on le voit ci-dessus, par former une table *à double entrée,* composée de dix colonnes verticales et de quinze lignes horizontales; puis, dans la première ligne, écrivons les unités 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,

et, dans la première colonne, les dizaines 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 : une case quelconque sera considérée comme renfermant le nombre composé des dizaines et des unités qui correspondent à cette case.

Cela posé, si l'on barre les cases de 2 en 2 à partir de 4, puis de 3 en 3 à partir de 9, puis de 5 en 5 à partir de 25, puis de 7 en 7 à partir de 49, puis enfin de 11 en 11 à partir de 121, je dis que les nombres non barrés sont premiers.

D'abord, les nombres **1**, **2**, **3** sont évidemment premiers.

Ensuite, les nombres **5** et **7**, compris entre les carrés 4 et 9 des nombres premiers consécutifs 2 et 3, n'étant pas divisibles par 2, sont des nombres premiers (**160**).

De même, les nombres **11**, **13**, **17**, **19**, **23**, compris entre les carrés 9 et 25 des nombres premiers consécutifs 3 et 5, n'étant divisibles ni par 2 ni par 3, sont des nombres premiers.

De même, les nombres **29**, **31**, **37**, **41**, **43**, **47**, compris entre les carrés 25 et 49 des nombres premiers consécutifs 5 et 7, n'étant divisibles ni par 2 ni par 3 ni par 5, sont des nombres premiers.

Et ainsi de suite (*).

CHAPITRE IV

DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR DE DEUX OU DE PLUSIEURS NOMBRES

162. On appelle *plus grand commun diviseur* de plusieurs nombres *le plus grand nombre qui les divise à la fois.*

Ainsi **12** et **18** ont pour communs diviseurs 1, 2, 3, 6 : **6** est leur plus grand commun diviseur.

163. La recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est souvent abrégée par l'application des propositions suivantes :

(*) Le procédé de formation d'une table de nombres premiers, qui vient d'être exposé, est connu sous le nom de *crible d'*ÉRATOSTHÈNE. La disposition des nombres en tableau a été indiquée par CATALAN, *Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre,* n° 87.

1° *Dans la recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on peut faire abstraction de ceux de ces nombres qui sont multiples d'autres nombres donnés.*

Soit proposé de trouver le plus grand commun diviseur des nombres 36, 48, 60, 72, 120.

On remarque que 72 est multiple de 36 et que 120 est multiple de 60 : donc le plus grand commun diviseur des cinq nombres 36, 48, 60, 72, 120 est le même que celui des trois nombres 36, 48, 60.

En particulier, *lorsque le plus petit de plusieurs nombres divise chacun des autres nombres, il est le plus grand commun diviseur de ces nombres.*

Ainsi le plus grand commun diviseur des nombres 18, 144, 324, 360 est **18.**

2° *Lorsque le plus petit de plusieurs nombres ne divise pas chacun des autres nombres, on peut chercher les diviseurs de l'un de ces nombres, et prendre le plus grand de ces diviseurs qui divise chacun des autres nombres.*

Soit proposé de trouver le plus grand commun diviseur des nombres 36, 48, 60, dont le plus petit, 36, ne divise pas les deux autres.

On cherche les diviseurs de 36 (**148**), savoir :

1,	2,	3,	4,	6,
36,	18,	12,	9,	6 :

12 est le plus grand de ces diviseurs qui divise les deux nombres 48 et 60 : donc 12 est le plus grand commun diviseur des trois nombres 36, 48, 60.

*3° *Dans la recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on peut remplacer l'un de ces nombres par son excès sur l'un des autres nombres.*

Je dis, par exemple, que le plus grand commun diviseur des nombres a, b, c est le même que celui des nombres a, b, $c - b$.

En effet, tout commun diviseur des nombres a, b, c, divisant b et c, divise la différence $c - b$ (**128**), et, par suite, est un commun diviseur des nombres a, b, $c - b$. Réciproquement, tout commun diviseur des nombres

a, b et $c - b$, divisant b et $c - b$, divise la somme $b + (c - b)$ (**125**) ou c (**35**), et, par suite, est un commun diviseur des nombres a, b, c. Donc les nombres a, b, c et les nombres a, b, $c - b$ ont les mêmes communs diviseurs. Par conséquent, le plus grand commun diviseur des nombres a, b, c est le même que celui des nombres a, b, $c - b$.

Par exemple, le plus grand commun diviseur des nombres 28, 36, 92, 100 est le même que celui des nombres 28, 36, 92, 100 moins 92 ou 8. Or les diviseurs de 8 sont 1, 2, 4, 8, dont 4 est le plus grand qui divise 28, 36 et 92 : donc **4** est le plus grand commun diviseur des nombres 28, 36, 92, 100.

Mais il existe des méthodes qui permettent de trouver, à coup sûr, le plus grand commun diviseur de deux ou de plusieurs nombres.

Du plus grand commun diviseur de deux nombres.

164. La recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres est basée sur la proposition suivante :

Tout facteur, commun au dividende et au diviseur, divise le reste; et, réciproquement, *tout facteur, commun au diviseur et au reste, divise le dividende.*

Soit, par exemple, le nombre 180, qui, divisé par 24, donne 7 pour quotient entier et 12 pour reste. On aura :

$$180 = 24 \times 7 + 12.$$

Je dis : 1° que *tout diviseur,* 6, par exemple, *commun au dividende* 180 *et au diviseur* 24, *divise le reste* 12 *de leur division.*

En effet, tout nombre qui divise 24, divise 24×7, qui est un multiple de 24 (**130**) : donc tout diviseur commun au dividende 180 et au diviseur 24 divise à la fois 180 et 24×7, c'est-à-dire une somme et l'une des deux parties de cette somme : donc il divise aussi l'autre partie, ou le reste 12 de la division (**129**).

On peut déduire de là que, *lorsqu'on divise le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient entier ne change pas, mais le reste est divisé par ce nombre* : proposition qui a déjà été démontrée (**81**, 2°).

Je dis : 2° que *tout diviseur*, 6, par exemple, *commun au diviseur* 24 *et au reste* 12, *divise le dividende* 180.

En effet, tout nombre, qui divise 24, divise 24 × 7, qui est un multiple de 24 (**130**) : donc tout diviseur commun au diviseur 24 et au reste 12 divise à la fois 24 × 7 et 12 : donc il divise la somme de ces deux nombres, ou le dividende 180 (**125**).

165. Soit maintenant proposé de trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, 1260 et 432, par exemple.

On raisonnera de la manière suivante :

Le plus grand commun diviseur des deux nombres 1260 et 432 ne peut surpasser le plus petit 432 de ces nombres. De plus, comme le plus petit 432 de ces nombres se divise lui-même, s'il divisait aussi le plus grand 1260, il serait le plus grand commun diviseur des deux nombres.

	2	1	11
1260	432	396	**36**
864	396	36	
396	36	36	
		36	
		0	

On est donc conduit à essayer la division du plus grand nombre 1260 par le plus petit 432 : on trouve 2 pour quotient et 396 pour reste. Donc 432 n'est pas le plus grand commun diviseur cherché.

Mais *le plus grand commun diviseur de* 1260 *et* 432 *est le même que celui de* 432 *et* 396.

En effet, tout diviseur commun au dividende 1260 et au diviseur 432 divise le reste 396 de leur division (**164**, 1°), et, par suite, est un commun diviseur des nombres 432 et 396.

Réciproquement, tout diviseur commun au diviseur 432 et au reste 396 divise le dividende 1260 (**164**, 2°), et, par suite, est un commun diviseur des nombres 1260 et 432.

Donc les nombres 1260 et 432 et les nombres 432 et 396 ont les mêmes communs diviseurs.

Par conséquent, le plus grand commun diviseur de 1260 et 432 est le même que celui de 432 et 396.

On raisonnera donc sur les nombres 432 et 396 comme on l'a fait sur les nombres proposés, en disant :

Si le plus petit nombre 396 divisait le plus grand 432, comme il se divise lui-même, il serait le plus grand commun diviseur des deux nombres. On essaiera donc la division de 432 par 396 : on trouve 1 pour quotient et 36 pour reste. Donc 396 n'est pas le plus grand commun diviseur de 432 et 396.

Mais on fera voir, comme précédemment, que *le plus grand commun diviseur de* 432 *et* 396 *est le même que celui de* 396 *et* 36.

On essaiera donc encore la division de 396 par 36 : on trouve 11 pour quotient et le reste est nul. Donc **36** est le plus grand commun diviseur de 396 et 36, et, partant, de 432 et 396, et, enfin, de 1260 et 432.

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour trouver le plus grand commun diviseur de deux nombres, on divise le plus grand par le plus petit, le plus petit par le reste de la division, le premier reste par le deuxième, le deuxième par le troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un reste nul : le dernier diviseur est le plus grand commun diviseur cherché.

L'application de cette règle conduit toujours à un reste nul, car les restes successifs sont des nombres entiers décroissants.

166. Lorsque l'on connaît le plus grand commun diviseur de deux restes consécutifs, il est inutile de poursuivre l'opération : car ce nombre est le plus grand commun diviseur cherché (**165**).

Ainsi, dans la recherche du plus grand commun diviseur des deux nombres 1466 et 424, on trouve les restes consécutifs 36 et 14. Or 14 n'a d'autres diviseurs que 1, 2, 7, 14, dont 2 est le plus grand qui divise aussi 36. Donc **2** est le plus grand commun diviseur des restes 36 et 14, et, par suite, des nombres 1466 et 424.

On peut aussi, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, remplacer le plus grand de ces nombres, ou le plus grand de deux restes consécutifs, par leur différence (**163**, 3°).

Enfin, *lorsqu'on prévoit que le reste d'une division sera plus grand que la moitié du diviseur, on abrège le calcul en prenant le quotient à moins d'une unité par excès.*

Ainsi la recherche du plus grand commun diviseur des nombres 910 et 525 nécessite cinq divisions, si l'on prend les quotients *par défaut;* mais elle n'exige que trois divisions, si l'on prend les quotients *par excès.*

	1	1	2	1	3
910	525	385	140	105	**35**
525	385	280	105	105	
385	140	105	35	0	

	2	4	4
910	525	140	**35**
1050	560	140	
140	35	0	

167. Théorème I. *Tout nombre, qui en divise deux autres, divise leur plus grand commun diviseur.*

Ainsi le nombre 9, qui divise 1260 et 432, divise le plus grand commun diviseur de ces deux nombres.

En effet, 9, divisant 1260 et 432, divise le reste 396 de leur division (**164,** 1°); divisant 432 et 396, il divise le reste 36 de leur division, et ainsi de suite. Ainsi 9 divise les restes successifs auxquels conduit la recherche du plus grand commun diviseur : donc il divise ce plus grand commun diviseur, qui est l'un de ces restes.

On déduit de là que *les communs diviseurs de deux nombres sont les diviseurs mêmes de leur plus grand commun diviseur.*

168. Théorème II. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise deux nombres par un même nombre, leur plus grand commun diviseur est multiplié ou divisé par ce nombre.*

Si, par exemple, on multiplie par 4 les nombres 1260 et 432, le plus grand commun diviseur 36 de ces nombres sera lui-même multiplié par 4; c'est-à-dire le plus grand commun diviseur des produits 1260×4 et 432×4 sera 36×4.

En effet, les nombres 1260 et 432 étant multipliés par 4, le reste 396 de leur division est aussi multiplié par 4 (**81**); de même, les nombres 432 et 396 étant multipliés par 4, le reste 36 de leur division est aussi multiplié par 4, et ainsi de suite. Ainsi les restes successifs, auxquels conduit la recherche du plus grand commun diviseur, sont multipliés par 4 : donc ce plus grand commun diviseur, qui est l'un de ces restes, est lui-même multiplié par 4.

La démonstration est la même, si, au lieu de multiplier, on divise les deux nombres par un même nombre.

Il suit de là qu'on peut, dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres, supprimer un facteur commun à ces nombres, sauf à multiplier ensuite le plus grand commun diviseur des deux quotients par le facteur supprimé.

Du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres.

169. Soit proposé de trouver le plus grand commun diviseur des quatre nombres 720, 300, 156, 64.

Le plus grand commun diviseur des deux nombres 720 et 300 est 60 (**165**) : or je dis que *le plus grand commun diviseur des quatre nombres* 720, 300, 156, 64 *est le même que celui des trois nombres* 60, 156, 64.

En effet, tout commun diviseur des quatre nombres donnés, divisant 720 et 300, divise leur plus grand commun diviseur 60 (**167**), et, par suite, est un commun diviseur des trois nombres 60, 156, 64.

Réciproquement, tout commun diviseur des trois nombres 60, 156, 64, divisant 60, divise 720 et 300, qui sont des multiples de 60, et, par suite, est un commun diviseur des quatre nombres 720, 300, 156, 64.

Donc les quatre nombres 720, 300, 156, 64 et les trois nombres 60, 156, 64 ont les mêmes communs diviseurs.

Par conséquent, le plus grand commun diviseur de 720, 300, 156, 64 est le même que celui de 60, 156, 64.

Le plus grand commun diviseur de 60 et 156 étant 12 (**165**), on fera voir, comme précédemment, que *le plus grand commun diviseur des trois nombres* 60, 156, 64 *est le même que celui des deux nombres* 12 *et* 64.

Or le plus grand commun diviseur de 12 et 64 est 4 : donc **4** est le plus grand commun diviseur des trois nombres 60, 156, 64, et, partant, des quatre nombres 720, 300, 156, 64.

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on cherche le plus grand commun diviseur des deux premiers, puis celui du

nombre obtenu et du troisième nombre, puis celui du nouveau nombre obtenu et du quatrième nombre, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé tous les nombres donnés : le dernier plus grand commun diviseur obtenu est le plus grand commun diviseur cherché.

170. Théorème III. *Tout nombre, qui en divise plusieurs autres, divise leur plus grand commun diviseur.*

Ainsi le nombre 2, qui divise 720, 300, 156, 64, divise le plus grand commun diviseur 4 de ces nombres.

En effet, 2, divisant 720, 300, 156, 64, divise le plus grand commun diviseur 60 de 720 et 300 (**167**), et, par suite, est un commun diviseur de 60, 156, 64. De même, 2, divisant 60, 156, 64, divise le plus grand commun diviseur 12 de 60 et 156, et, par suite, est un commun diviseur de 12 et 64. Enfin, 2, divisant 12 et 64, divise leur plus grand commun diviseur 4, qui est aussi le plus grand commun diviseur des nombres proposés.

On déduit de là que *les communs diviseurs de plusieurs nombres sont les diviseurs mêmes de leur plus grand commun diviseur.*

171. Théorème IV. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise plusieurs nombres par un même nombre, leur plus grand commun diviseur est multiplié ou divisé par ce nombre.*

Si, par exemple, on multiplie par 7 les nombres 720, 300, 156, 64, le plus grand commun diviseur 4 de ces nombres sera lui-même multiplié par 7.

En effet, les nombres 720 et 300 étant multipliés par 7, le plus grand commun diviseur 60 de ces nombres est aussi multiplié par 7 (**168**). De même, les nombres 60 et 156 étant multipliés par 7, le plus grand commun diviseur 12 de ces nombres est aussi multiplié par 7. Enfin, les nombres 12 et 64 étant multipliés par 7, le plus grand commun diviseur 4 de ces nombres est aussi multiplié par 7 : or 4 est le plus grand commun diviseur des quatre nombres proposés.

La démonstration est la même, si, au lieu de multiplier, on divise les nombres proposés par un même nombre.

Il suit de là qu'on peut, dans la recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, supprimer un facteur commun à ces nombres, sauf à multiplier ensuite le plus grand commun diviseur des quotients par le facteur supprimé.

CHAPITRE V

DES NOMBRES PREMIERS ENTRE EUX

172. On dit que plusieurs nombres sont *premiers entre eux lorsqu'ils n'admettent d'autre commun diviseur que l'unité.*

Ainsi les nombres 6, 10, 15 sont premiers entre eux.

Pour reconnaître si des nombres donnés sont premiers entre eux, on cherche leur plus grand commun diviseur (**165, 169**) : si ce plus grand commun diviseur est 1, les nombres sont premiers entre eux.

173. Théorème I. *Tout nombre premier, qui ne divise pas un autre nombre, est premier avec lui.*

Soit un nombre premier p, qui ne divise pas un certain nombre N : je dis que p et N sont premiers entre eux.

En effet, le nombre p, étant premier, n'a d'autres diviseurs que 1 et p : donc p et N ne peuvent avoir d'autres communs diviseurs que 1 et p. Mais, par hypothèse, p ne divise pas N. Donc p et N ne peuvent avoir d'autre commun diviseur que 1 : donc p et N sont premiers entre eux.

174. Théorème II. *Lorsque deux ou plusieurs nombres ne sont pas premiers entre eux, leur plus petit commun diviseur, autre que l'unité, est un nombre premier.*

Supposons que les nombres a, b, c ne soient pas premiers entre eux : ils admettront un ou plusieurs communs diviseurs, autres que l'unité. Soit p le plus petit de ces communs diviseurs : je dis que p est premier.

En effet, si p n'était pas premier, il admettrait un ou plusieurs diviseurs, compris entre 1 et p. Mais tout diviseur de p diviserait aussi a, b, c, qui sont des multiples de p (**130**). Donc les nombres a, b, c auraient un ou

plusieurs communs diviseurs compris entre 1 et p, et, par suite, p ne serait pas le plus petit commun diviseur, autre que l'unité, des nombres a, b, c, ce qui est contre l'hypothèse.

175. Théorème III. *Lorsqu'on divise deux ou plusieurs nombres par leur plus grand commun diviseur, les quotients obtenus sont premiers entre eux.*

Soit d le plus grand commun diviseur des nombres a, b, c : je dis que, si l'on divise a, b, c par d, les quotients obtenus seront premiers entre eux.

En effet, on a vu que, lorsqu'on divise plusieurs nombres par un même nombre, leur plus grand commun diviseur est divisé par ce nombre (**168, 171**). Si donc on divise a, b, c par d, les quotients obtenus auront pour plus grand commun diviseur $d : d$ ou 1. Donc ces quotients sont premiers entre eux.

176. Théorème IV. *Lorsqu'un nombre divise un produit de deux facteurs et qu'il est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre.*

Soit un nombre d, qui divise le produit $a.b$ de deux nombres a et b, et qui est premier avec a : je dis que d divise b.

En effet, les nombres d et a étant premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur est 1. Or, lorsqu'on multiplie deux nombres par un même nombre, leur plus grand commun diviseur est multiplié par ce nombre (**168**). Si donc on multiplie d et a par b, le plus grand commun diviseur des produits $d.b$ et $a.b$ sera $1.b$ ou b. Mais d divise le produit $d.b$, qui est son multiple; il divise aussi, par hypothèse, le produit $a.b$: donc il divise le plus grand commun diviseur b de ces deux nombres (**167**).

177. Théorème V. *Lorsqu'un nombre premier divise un produit de plusieurs facteurs, il divise au moins l'un d'eux.*

Soit p un nombre premier qui divise le produit $a.b.c.d$ des quatre nombres a, b, c, d : je dis que p divise l'un au moins de ces quatre nombres.

En effet, le produit $a.b.c.d$ peut être considéré comme le produit des deux facteurs $a.b.c$ et d. Si p divise d, le théorème est démontré. Si p ne divise pas d, il est premier avec lui (**173**), et, par suite, il divise l'autre facteur $a.b.c$ (**176**).

Le produit $a.b.c$ peut, à son tour, être considéré comme le produit des deux facteurs $a.b$ et c. Si p divise c, le théorème est démontré. Si p ne divise pas c, il est premier avec lui, et, par suite, il divise l'autre facteur $a.b$.

Enfin, si p divise b, le théorème est démontré. Si p ne divise pas b, il est premier avec lui, et, par suite, il divise a.

Donc p divise l'un au moins des quatre nombres a, b, c, d.

Corollaire. *Lorsqu'un nombre premier divise une puissance d'un nombre, il divise ce nombre.*

Si, par exemple, 7 divise a^3, il divise a.

Car a^3 est égal au produit $a \times a \times a$, et 7, divisant ce produit, doit diviser l'un de ses facteurs, ou le nombre a.

178. Théorème VI. *Tout nombre, premier avec plusieurs autres, est premier avec leur produit;* et, réciproquement, *tout nombre, premier avec un produit, est premier avec chacun de ses facteurs.*

1° Si p est premier avec chacun des nombres a, b, c, il est premier avec le produit $a.b.c$ de ces nombres.

En effet, si p n'était pas premier avec ce produit, il aurait avec lui un diviseur premier commun (**174**), lequel, divisant le produit, diviserait l'un au moins de ses facteurs (**177**) : donc p ne serait pas premier avec chacun des facteurs de ce produit, ce qui est contre l'hypothèse.

2° Réciproquement, si p est premier avec le produit $a.b.c$ des nombres a, b, c, il est premier avec chacun de ces nombres.

En effet, si p n'était pas premier avec le nombre a, par exemple, il aurait avec lui un diviseur commun, lequel, divisant a, diviserait son multiple $a.b.c$: donc le nombre p et le produit $a.b.c$ ne seraient pas premiers entre eux, ce qui est contre l'hypothèse.

Corollaire I. *Tout nombre, premier avec un autre, est premier avec toutes les puissances de celui-ci;* et, réciproquement, *tout nombre, premier avec une puissance d'un nombre, est premier avec ce nombre.*

Si, par exemple, a est premier avec b, il est aussi premier avec b^3.

Car b^3 est égal au produit $b \times b \times b$, et a, étant premier avec chacun des facteurs de ce produit, est premier avec le produit, ou avec b^3.

Réciproquement, si a est premier avec b^3, il est premier avec b.

Car b^3 est égal au produit $b \times b \times b$, et a, étant premier avec ce produit, est premier avec chacun de ses facteurs, ou avec b.

Corollaire II. *Lorsque deux nombres sont premiers entre eux, deux puissances quelconques de ces nombres sont aussi premières entre elles.*

Si, par exemple, les nombres a et b sont premiers entre eux, les puissances a^4 et b^6 de ces nombres seront aussi premières entre elles.

Car, d'après le précédent corollaire, a, étant premier avec b, est premier avec b^6, et b^6, étant premier avec a, est premier avec a^4.

179. Théorème VII. *Lorsqu'un nombre est divisible séparément par deux nombres premiers entre eux, il est divisible par leur produit.*

Soit N un nombre divisible séparément par deux nombres a et b, premiers entre eux : je dis que N est divisible par le produit $a.b$.

En effet, le nombre N, étant divisible par a, est égal au produit de a par un certain nombre entier q, et on a

$$N = a.q.$$

Or b divise N : donc il divise le produit $a.q$. Mais b est premier avec a : donc il divise q (**176**).

Le nombre q est donc égal au produit de b par un certain nombre entier s, et on a

$$q = b.s,$$

et, par suite (**59**),

$$N = a.b.s.$$

Le nombre N, étant égal au produit de $a.b$ par s, est divisible par $a.b$.

180. Théorème VIII. Plus généralement, *lorsqu'un nombre est divisible séparément par plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, il est divisible par leur produit.*

Soit N un nombre divisible séparément par les nombres a, b, c, premiers entre eux deux à deux : je dis que N est divisible par le produit $a.b.c$.

En effet, le nombre N, étant divisible par a, est égal au produit de a par un certain nombre entier q, et on a

$$N = a.q.$$

Or b divise N : donc il divise le produit $a.q$. Mais b est premier avec a : donc il divise q (**176**).

Le nombre q est donc égal au produit de b par un certain nombre entier s, et on a

$$q = b.s,$$

et, par suite,

$$N = a.b.s.$$

Or c divise N : donc il divise le produit $a.b.s$. Mais c est premier avec a et avec b, et, par suite, avec le produit $a.b$ (**178**) : donc c divise s.

Le nombre s est donc égal au produit de c par un certain nombre entier t, et on a

$$s = c.t,$$

et, par suite,

$$N = a.b.c.t.$$

Le nombre N, étant égal au produit de $a.b.c$ par t, est divisible par $a.b.c$.

181. Les deux théorèmes qui précèdent permettent d'étendre les caractères de divisibilité qui ont été donnés plus haut.

On reconnaît, par exemple, qu'*un nombre est divisible par* 6 *lorsqu'il l'est par* 2 *et par* 3, c'est-à-dire *lorsqu'il est pair et que la somme de ses chiffres est divisible par* 3.

De même, un nombre est divisible par 12, par 15, par 18, par 24, etc., lorsqu'il l'est respectivement par 3 et par 4, par 3 et par 5, par 2 et par 9, par 3 et par 8, etc.

CHAPITRE VI

DU PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE DE DEUX OU DE PLUSIEURS NOMBRES

182. On appelle *plus petit commun multiple* de plusieurs nombres *le plus petit nombre divisible à la fois par chacun d'eux.*

Ainsi le plus petit commun multiple des nombres 9 et 12 est **36.**

183. La recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres est souvent abrégée par l'application des propositions suivantes :

1° *Dans la recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres, on peut faire abstraction de ceux de ces nombres qui sont diviseurs d'autres nombres donnés.*

Soit proposé de trouver le plus petit commun multiple des nombres 5, 9, 10, 15, 18.

On remarque que 5 divise 10 et que 9 divise 18 : donc le plus petit commun multiple des cinq nombres 5, 9, 10, 15, 18 est le même que celui des trois nombres 10, 15, 18 (**131**).

En particulier, *lorsque le plus grand de plusieurs nombres est divisible par chacun des autres nombres, il est le plus petit commun multiple de ces nombres.*

Ainsi le plus petit commun multiple des nombres 12, 15, 30, 60 est **60**.

2° *Lorsque le plus grand de plusieurs nombres n'est pas divisible par chacun des autres nombres, on peut former les multiples successifs de l'un de ces nombres, et s'arrêter au premier de ces multiples qui est divisible par chacun des autres nombres.*

Soit proposé de trouver le plus petit commun multiple des trois nombres 10, 15, 18, dont le plus grand 18 n'est pas divisible par chacun des deux autres.

On forme les multiples successifs de 18, savoir : 36, 54, 72, 90... : 90 est le premier de ces multiples qui soit divisible par les deux nombres 10 et 15 : donc **90** est le plus petit commun multiple des trois nombres 10, 15, 18.

Mais il existe des méthodes qui permettent de trouver, à coup sûr, le plus petit commun multiple de deux ou de plusieurs nombres.

Du plus petit commun multiple de deux nombres.

184. La détermination du plus petit commun multiple de deux nombres est basée sur la proposition suivante :

Le plus petit commun multiple de deux nombres est égal à leur produit divisé par leur plus grand commun diviseur.

Soit d le plus grand commun diviseur des deux nombres a et b : je dis

que le plus petit commun multiple de ces deux nombres est égal à leur produit $a.b$ divisé par leur plus grand commun diviseur d.

En effet, divisons les nombres a et b par leur plus grand commun diviseur d : les quotients, que nous appellerons q et r, seront premiers entre eux (**175**), et on aura

$$a = d.q, \quad b = d.r.$$

Appelons M un multiple commun quelconque des nombres a et b.

Puisque le nombre M est divisible par a, ou par le produit $d.q$, il s'ensuit qu'il est divisible par d, et que le quotient de M par d est divisible par q. De même, puisque le nombre M est divisible par b, ou par le produit $d.r$, il s'ensuit qu'il est divisible par d, et que le quotient de M par d est divisible par r. Le quotient de M par d est donc divisible séparément par les nombres q et r, qui sont premiers entre eux : donc il est divisible par le produit $q.r$ (**180**). Par suite, le nombre M est un multiple du produit $d.q.r$.

Réciproquement, tout multiple du produit $d.q.r$ est divisible séparément par les produits $d.q$ ou a et $d.r$ ou b (**124**), ou, en d'autres termes, est un commun multiple des nombres a et b.

Ainsi, d'une part, tout commun multiple des nombres a et b est un multiple du produit $d.q.r$, et, d'autre part, tout multiple du produit $d.q.r$ est un commun multiple des nombres a et b.

Il suit de là que les communs multiples des nombres a et b sont les mêmes que les multiples du nombre $d.q.r$, et, puisque ce nombre est à lui-même son plus petit multiple, il est aussi le plus petit commun multiple des deux nombres proposés.

Le nombre $d.q.r$

est d'ailleurs (**79**) égal à $d.q.d.r : d$,

ou (**58**) à $a.b : d$,

c'est-à-dire au produit des deux nombres divisé par leur plus grand commun diviseur.

***185**. Soit maintenant proposé de trouver le plus petit commun multiple des deux nombres 90 et 72.

Comme on vient de le voir, *le plus petit commun multiple de deux nombres est égal à leur produit divisé par leur plus grand commun diviseur.* On cherchera donc le plus grand commun diviseur 18 des deux nombres 90 et 72, et on divisera par 18 le produit 90 × 72 de ces deux nombres.

Dans la pratique, on commence par diviser l'un des deux nombres par leur plus grand commun diviseur, puis on multiplie l'autre nombre par le quotient obtenu.

On trouve ainsi **360** pour le plus petit commun multiple des deux nombres 90 et 72.

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour trouver le plus petit commun multiple de deux nombres, on commence par chercher leur plus grand commun diviseur (**165**) ; *puis on divise l'un de ces nombres par ce plus grand commun diviseur, et on multiplie l'autre nombre par le quotient obtenu.*

Lorsque deux nombres sont premiers entre eux, leur plus grand commun diviseur est 1, et, par suite, *leur plus petit commun multiple est égal à leur produit.* Ainsi le plus petit commun multiple des nombres 27 et 80, qui sont premiers entre eux, est 27 × 80 ou **2160**.

Les communs multiples de deux nombres sont les multiples mêmes de leur plus petit commun multiple (**184**). Ainsi les communs multiples des nombres 90 et 72 forment cette suite indéfinie de produits : 360 × 1, 360 × 2, 360 × 3, 360 × 4...

Du plus petit commun multiple de plusieurs nombres.

***186.** Soit proposé de trouver le plus petit commun multiple des quatre nombres 9, 15, 24, 28.

Le plus petit commun multiple des deux nombres 9 et 15 est 45 : or je dis que *le plus petit commun multiple des quatre nombres* 9, 15, 24, 28 *est le même que celui des trois nombres* 45, 24, 28.

En effet, tout commun multiple des quatre nombres donnés, étant un multiple de 9 et de 15, est un multiple de leur plus petit commun mul-

tiple 45 (**185**), et, par suite, est un commun multiple des trois nombres 45, 24, 28.

Réciproquement, tout commun multiple des trois nombres 45, 24, 28, étant un multiple de 45, est un commun multiple de 9 et de 15, qui sont des sous-multiples de 45, et, par suite, est un commun multiple des quatre nombres 9, 15, 24, 28.

Donc les quatre nombres 9, 15, 24, 28 et les trois nombres 45, 24, 28 ont les mêmes communs multiples.

Par conséquent, le plus petit commun multiple de 9, 15, 24, 28 est le même que le plus petit commun multiple de 45, 24, 28.

Le plus petit commun multiple de 45 et 24 étant 360, on fera voir, comme précédemment, que *le plus petit commun multiple des trois nombres* 45, 24, 28 *est le même que celui des deux nombres* 360 *et* 28.

Le plus petit commun multiple de 360 et 28 est 2520 : donc **2520** est le plus petit commun multiple des trois nombres 45, 24, 28, et, partant, des quatre nombres 9, 15, 24, 28.

On déduit, du raisonnement qui précède, la règle suivante :

Pour trouver le plus petit commun multiple de plusieurs nombres, on cherche le plus petit commun multiple des deux premiers, puis celui du nombre ainsi obtenu et du troisième nombre, puis celui du nouveau nombre obtenu et du quatrième nombre, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé tous les nombres donnés : le dernier plus petit commun multiple obtenu est le plus petit commun multiple cherché.

187. *Lorsque plusieurs nombres sont premiers entre eux deux à deux, leur plus petit commun multiple est égal à leur produit.*

Si, par exemple, les nombres a, b, c, d sont premiers entre eux deux à deux, leur plus petit commun multiple est égal à leur produit $a.b.c.d$.

En effet, les deux nombres a et b étant premiers entre eux, leur plus petit commun multiple est égal à leur produit $a.b$ (**185**).

Dès lors, le plus petit commun multiple des trois nombres a, b, c est le même que celui des deux nombres $a.b$ et c (**186**).

Or, le nombre c, étant premier avec a et avec b, est premier avec le pro-

duit $a.b$ (**178**) : donc le plus petit commun multiple des deux nombres $a.b$ et c, et, partant, des trois nombres a, b, c, est égal au produit $a.b.c$ (**185**).

Dès lors, le plus petit commun multiple des quatre nombres a, b, c, d est le même que celui des deux nombres $a.b.c$ et d (**186**).

Or, le nombre d étant premier avec a, b, c, est premier avec le produit $a.b.c$ (**178**) : donc le plus petit commun multiple des deux nombres $a.b.c$ et d, et, partant, des quatre nombres a, b, c, d, est égal au produit $a.b.c.d$ (**185**).

188. *Les communs multiples de plusieurs nombres sont les multiples mêmes de leur plus petit commun multiple.*

Je dis, par exemple, que les communs multiples des quatre nombres a, b, c, d ne sont autre chose que les multiples du plus petit commun multiple de ces nombres.

En effet, soit u le plus petit commun multiple des nombres a et b : les communs multiples des quatre nombres a, b, c, d seront les mêmes que les communs multiples des trois nombres u, c, d (**186**).

Soit v le plus petit commun multiple des nombres u et c : les communs multiples des trois nombres u, c, d seront les mêmes que les communs multiples des deux nombres v et d (**186**).

Enfin, soit M le plus petit commun multiple des nombres v et d : les communs multiples des nombres v et d seront les multiples mêmes de M (**185**).

Donc les communs multiples des quatre nombres a, b, c, d sont les multiples de M, c'est-à-dire (**186**) les multiples de leur plus petit commun multiple.

CHAPITRE VII

DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN LEURS FACTEURS PREMIERS

189. Théorème I. *Tout nombre entier, qui n'est pas premier, est un produit de facteurs premiers.*

En effet, si le nombre N, par exemple, n'est pas premier, son plus petit diviseur, autre que l'unité, est un nombre premier (**158**). Soit a ce plus petit diviseur, et soit q le quotient de N par a, on aura

$$N = a.q.$$

Si q est premier, N est un produit de deux facteurs premiers, et le théorème est démontré. Si q n'est pas premier, son plus petit diviseur, autre que l'unité, est un nombre premier. Soit b ce plus petit diviseur, et soit r le quotient de q par b, on aura

$$q = b.r,$$

et, par suite (**59**),

$$N = a.b.r.$$

Si r est premier, N est un produit de trois facteurs premiers, et le théorème est démontré. Si r n'est pas premier, on répétera le même raisonnement, et ainsi de suite.

Les quotients successifs q, r, etc., sont des nombres entiers décroissants : leur nombre est donc nécessairement limité; d'ailleurs, le dernier d'entre eux est premier : donc N est un produit de facteurs premiers.

190. Théorème II. *Un nombre n'est décomposable qu'en un seul système de facteurs premiers.*

Supposons, par exemple, que le nombre 175, égal au produit des nombres premiers 5, 5, 7, soit encore égal au produit des nombres premiers a, b, c, d, e, en sorte que l'on ait

$$5.5.7 = a.b.c.d.e.$$

Le facteur 5, divisant le premier produit (**124**), divise aussi le second, qui, par hypothèse, est égal au premier; de plus, le facteur 5, étant premier, divise l'un au moins des facteurs de ce second produit (**177**), le facteur a, par exemple; enfin, puisque le facteur qu'il divise est aussi premier, il doit lui être égal : on a donc $a = 5$, et, par suite,

$$5.5.7 = 5.b.c.d.e.$$

Le facteur 5 étant commun aux deux produits, si on le supprime dans l'un et l'autre de ces produits, on aura

$$5.7 = b.c.d.e.$$

On démontrera, comme précédemment, que le facteur 5 du premier

de ces nouveaux produits est égal à l'un des facteurs du second, au facteur b, par exemple. On a donc

$$5.7 = 5.c.d.e,$$

et, par suite,

$$7 = c.d.e.$$

Le nombre 7 est égal à l'un des facteurs du second membre, au facteur c, par exemple. On a donc

$$7 = 7.d.e,$$

et, par suite,

$$1 = d.e,$$

égalité qui n'est possible que si l'on a

$$d = 1, \quad e = 1.$$

Les facteurs des deux produits 5.5.7 et $a.b.c$ sont donc égaux chacun à chacun, ce qui démontre le théorème.

La démonstration qui précède fait voir qu'un facteur premier quelconque entre le même nombre de fois dans les deux produits.

191. Problème. *Décomposer un nombre donné en ses facteurs premiers.*

Soit à décomposer le nombre **14952** en ses facteurs premiers.

Le nombre 14952, étant terminé par 2, est divisible par le nombre premier **2**. Effectuant la division, on trouve 7476 pour quotient. On a donc

$$14952 = 2 \times 7476,$$

14952	**2**
7476	**2**
3738	**2**
1869	**3**
623	**7**
89	**89**
1	

et on est ramené à décomposer 7476 en ses facteurs premiers.

Le nombre 7476, étant terminé par 6, est aussi divisible par **2**. Effectuant la division, on trouve 3738 pour quotient. On a donc

$$7476 = 2 \times 3738,$$

et, par suite (**59**),

$$14952 = 2 \times 2 \times 3738,$$

et on est ramené à décomposer 3738 en ses facteurs premiers.

Le nombre 3738, étant terminé par 8, est encore divisible par **2**. Effectuant la division, on trouve 1869 pour quotient. On a donc

$$3738 = 2 \times 1869,$$

et, par suite,

$$14952 = 2 \times 2 \times 2 \times 1869,$$

et on est ramené à décomposer 1869 en ses facteurs premiers.

Le nombre 1869 n'est plus divisible par 2; mais son chiffre unique (**153**) étant 6, il est divisible par le nombre premier **3**. Effectuant la division, on trouve 623 pour quotient. On a donc

$$1869 = 3 \times 623,$$

et, par suite,

$$14952 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 623,$$

et on est ramené à décomposer 623 en ses facteurs premiers.

Le nombre 623 n'est plus divisible par 3. Il n'est pas non plus divisible par le nombre premier 5. Mais, divisé par le nombre premier **7**, il donne 89 pour quotient, et le reste est nul. On a donc

$$623 = 7 \times 89,$$

et, par suite,

$$14952 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 89.$$

Le nombre **89** étant premier, la décomposition est achevée. Ainsi

$$\mathbf{14952 = 2^3 \times 3 \times 7 \times 89}.$$

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour décomposer un nombre en ses facteurs premiers, on le divise successivement par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, *etc., jusqu'à ce qu'on trouve un diviseur qui donne un reste nul : on a alors le plus petit facteur premier du nombre proposé.*

On divise le quotient obtenu par le même nombre premier et par les nombres premiers suivants, jusqu'à ce qu'on trouve encore un diviseur qui donne un reste nul : on a alors un second facteur premier du nombre proposé.

On opère de la même manière sur le nouveau quotient, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient qui soit premier (**160**) : *ce quotient sera le dernier facteur premier du nombre proposé.*

Lorsque le nombre donné est le produit de deux ou de plusieurs nombres connus, il est plus simple de décomposer séparément chacun de ces nombres, et de former ensuite un produit unique composé de tous leurs facteurs premiers (**57**).

CHAPITRE VIII

DES DIVISEURS SIMPLES & COMPOSÉS DES NOMBRES

192. Les diviseurs d'un nombre sont appelés *simples* ou *composés*, suivant qu'ils sont *premiers* ou *non premiers*.

193. Théorème I. *Pour qu'un nombre soit divisible par un autre nombre, il faut et il suffit que le premier contienne tous les facteurs premiers du second, et chacun d'eux au moins le même nombre de fois.*

Cette condition est *nécessaire;* car, si le premier nombre est divisible par le second, il est égal au produit du second par un certain nombre entier : donc il renferme tous les facteurs premiers de ce second nombre.

Cette condition est *suffisante;* car, quand elle est remplie, le premier nombre peut être décomposé en un produit de deux facteurs, dont l'un contienne tous les facteurs du second nombre : donc il est divisible par ce second nombre.

Corollaire. *Pour qu'un nombre soit une puissance d'un autre nombre, il faut et il suffit que les exposants de ses facteurs premiers soient divisibles par le degré de la puissance.*

194. Problème. *Former tous les diviseurs tant simples que composés d'un nombre donné* (**148**).

Soit proposé de former tous les diviseurs du nombre 360.

On a $\mathbf{360} = \mathbf{2}^3 \times \mathbf{3}^2 \times \mathbf{5}$. Par suite, tout diviseur de 360, autre que l'unité, renferme un ou plusieurs des facteurs premiers 2, 3, 5, avec les exposants 1, 2 ou 3 pour le facteur **2**, 1 ou 2 pour le facteur **3**, 1 pour le facteur **5** (**193**).

Pour former toutes ces combinaisons des facteurs 2, 3, 5, on écrit les trois lignes

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3, \\ 1, & 3, & 3^2, & \\ 1, & 5, & & \end{array}$$

ou, si l'on veut, le produit

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \times (1 + 3 + 3^2) \times (1 + 5),$$

chaque ligne ou parenthèse étant formée de l'unité et des puissances successives de l'un des facteurs premiers du nombre 360, depuis la première jusqu'à celle qui figure dans la composition de ce nombre; on multiplie ensuite les nombres de la première ligne ou parenthèse successivement par chacun des nombres de la seconde, puis les produits trouvés successivement par chacun des nombres de la troisième : les derniers produits obtenus sont tous les diviseurs du nombre 360.

En effet, en multipliant les nombres 1, 2, 2^2, 2^3 successivement par 1, 3, 3^2, on obtient le diviseur 1 et les diviseurs composés de facteurs 2, le diviseur 3 et les diviseurs composés de facteurs 2 et du facteur 3, le diviseur 3^2 et les diviseurs composés de facteurs 2 et du facteur 3^2. En multipliant ensuite les produits précédents par 1 et par 5, on reproduit les mêmes diviseurs, puis on forme ceux qui renferment le facteur 5. On obtient donc tous les diviseurs de 360.

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour avoir tous les diviseurs d'un nombre donné, on décompose ce nombre en ses facteurs premiers, puis on fait un tableau composé d'autant de lignes que le nombre renferme de facteurs premiers différents : chaque ligne est formée de l'unité et des puissances successives de l'un des facteurs premiers du nombre donné, depuis la première jusqu'à celle qui figure dans la composition de ce nombre. On multiplie les nombres de la première ligne par chacun des nombres de la deuxième, les produits trouvés par chacun des nombres de la troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait employé toutes les lignes du tableau : les derniers produits obtenus sont les diviseurs du nombre donné.

***195.** Théorème II. *Le nombre des diviseurs d'un nombre, en y comprenant l'unité et le nombre lui-même, est égal au produit des exposants de ses facteurs premiers, augmentés chacun d'une unité.*

Soit proposé de trouver le nombre des diviseurs de 360.

Le nombre 360 étant égal à $2^3 \times 3^2 \times 5$, on a vu (**194**) que tous ses diviseurs ne sont autre chose que les différents termes du produit

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \times (1 + 3 + 3^2) \times (1 + 5).$$

Or le nombre des termes du premier facteur de ce produit est égal à $3 + 1$, c'est-à-dire à l'exposant 3 du facteur 2, plus 1; le nombre des termes du second facteur est égal à $2 + 1$, c'est-à-dire à l'exposant 2 du facteur 3, plus 1; et le nombre des termes du troisième facteur est égal à $1 + 1$, c'est-à-dire à l'exposant 1 du facteur 5, plus 1. Par conséquent, en multipliant le premier facteur par le second, on obtiendra $(3 + 1) \times (2 + 1)$ termes, et, en multipliant ce produit par le troisième facteur, on obtiendra $(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$ termes. Donc le nombre des diviseurs de 360 est égal à $(3 + 1) \times (2 + 1) \times (1 + 1)$ ou à **24**.

On peut remarquer que *le nombre des diviseurs d'un nombre est pair, excepté lorsque ce nombre est un carré* (**148** ou **193** et **195**).

***196.** On appelle *nombre parfait* celui qui est égal à la somme de ses parties aliquotes, ou à la somme de ses diviseurs excepté lui-même.

Tel est le nombre 6, qui est égal à la somme de ses diviseurs 1, 2, 3 (*).

On appelle *amiables* deux nombres dont chacun est égal à la somme des parties aliquotes de l'autre.

Tels sont les nombres 220 et 284 : car 220 est égal à la somme des parties aliquotes de 284, savoir : 1, 2, 4, 71, 142; et, réciproquement, 284 est égal à la somme des parties aliquotes de 220, savoir : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.

(*) Les nombres parfaits pairs sont de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$, $2^n - 1$ étant premier. On en connaît neuf, correspondant aux valeurs suivantes de n : 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61. On ne connaît aucun nombre parfait impair.

CHAPITRE IX

COMPOSITION DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR & DU PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE DE DEUX OU DE PLUSIEURS NOMBRES

197. Théorème I. *Le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est égal au produit de leurs facteurs premiers communs, pris chacun avec son plus petit exposant.*

Soient les trois nombres

$$\mathbf{336} = 2^4 \times 3 \times 7, \quad \mathbf{480} = 2^5 \times 3 \times 5, \quad \mathbf{720} = 2^4 \times 3^2 \times 5.$$

Je dis, en premier lieu, que tout diviseur commun à ces trois nombres ne peut contenir que les facteurs premiers *communs* à tous, savoir, 2 et 3.

En effet, un nombre qui renfermerait le facteur premier 7, par exemple, ne diviserait pas les nombres 480 et 720, dans lesquels n'entre pas ce facteur 7 (**193**).

Je dis, en second lieu, que chacun des facteurs premiers 2 et 3 peut recevoir un exposant *au plus* égal à celui qu'il a dans le nombre où il entre avec le moindre exposant : ainsi 2 ne peut avoir un exposant supérieur à 4, et 3 ne peut avoir un exposant supérieur à 1.

En effet, un nombre qui renfermerait le facteur 2 avec l'exposant 5, par exemple, ne diviserait pas les nombres 336 et 720, dans lesquels ce facteur entre avec un exposant plus petit (**193**).

Il suit de là que le plus grand commun diviseur des nombres 336, 480 et 720 est $\mathbf{2^4 \times 3 = 48}$.

198. Il résulte, de la proposition précédente, qu'*on ne change pas le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres en supprimant, dans l'un de ces nombres, un facteur premier avec l'un des autres nombres.*

Car on ne supprime de la sorte aucun facteur premier commun aux nombres donnés : donc on n'altère pas leur plus grand commun diviseur.

Cette remarque permet souvent de simplifier la recherche du plus grand commun diviseur de deux ou de plusieurs nombres.

Soit à trouver le plus grand commun diviseur des nombres 4800 et 63.

On supprime, dans le nombre 4800, le facteur 100, premier avec 63, ce qui donne 48; puis, dans le nombre 63, le facteur 7, premier avec 48, ce qui donne 9. On est ainsi ramené à chercher le plus grand commun diviseur des nombres 48 et 9.

En particulier, lorsqu'on cherche le plus grand commun diviseur de deux nombres par la méthode des divisions successives (**165**), *on peut, dans chaque reste, supprimer tout facteur premier avec le reste suivant.*

Car le plus grand commun diviseur des deux nombres est le même que celui de deux restes consécutifs (**165**). On peut donc, d'après ce qu'on vient de voir, supprimer, dans l'un de ces restes, un facteur premier avec l'autre.

199. Dans la pratique, la recherche du plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, par la méthode de décomposition en facteurs premiers, peut être opérée comme il suit :

Soit à trouver le plus grand commun diviseur des nombres 252, 360, 432.

252	360	432	
126	180	216	**2**
63	90	108	**2**
21	30	36	**3**
7	10	12	**3**

Ayant écrit ces nombres sur une même ligne horizontale, on remarque qu'ils sont tous trois divisibles par le nombre premier 2 : on écrit, dans une colonne verticale à droite, le diviseur **2**, et, au-dessous des nombres donnés, les quotients 126, 180, 216 de leur division par 2.

Les nombres 126, 180, 216 sont encore tous trois divisibles par 2 : on écrit une deuxième fois, dans la colonne verticale à droite, le diviseur **2**, et, au-dessous des nombres 126, 180, 216, les quotients 63, 90, 108 de leur division par 2.

Les nombres 63, 90, 108 ne sont plus tous trois divisibles par 2, mais ils sont tous trois divisibles par le nombre premier 3 : on écrit, dans la colonne verticale à droite, le diviseur **3**, et, au-dessous des nombres 63, 90, 108, les quotients 21, 30, 36 de leur division par 3.

Les nombres 21, 30, 36 sont encore tous trois divisibles par 3 : on écrit, une seconde fois, dans la colonne verticale à droite, le diviseur **3**, et, au-dessous des nombres 21, 30, 36, les quotients 7, 10, 12 de leur division par 3.

Les nombres 7, 10, 12 ne sont plus tous trois divisibles par 3, ni par aucun autre nombre premier.

Les diviseurs premiers communs aux nombres donnés sont donc 2, 2, 3, 3, et, par suite, le produit **2** × **2** × **3** × **3** ou **36** est le plus grand commun diviseur de ces nombres.

Mais il est encore plus simple d'opérer de la manière suivante :

252	360	432	
63	90	108	**4**
7	10	12	**9**

Ayant écrit les nombres 252, 360, 432 sur une même ligne horizontale, on écrit, dans une colonne verticale à droite, *un diviseur commun quelconque de ces nombres*, le diviseur **4**, par exemple, et, au-dessous de ces nombres, les quotients 63, 90, 108 de leur division par 4.

Les nombres 63, 90, 108 admettent le commun diviseur 9 : on écrit, dans la colonne verticale à droite, le diviseur **9**, et, au-dessous des nombres 63, 90, 108, les quotients 7, 10, 12 de leur division par 9.

Les nombres 7, 10, 12 sont premiers entre eux : donc le plus grand commun diviseur des nombres donnés est **4** × **9** ou **36**.

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on écrit ces nombres sur une même ligne horizontale, en barrant ceux qui sont multiples de l'un des autres nombres (**163**). *On écrit, dans une colonne verticale à droite, un diviseur commun quelconque des nombres donnés, et on*

écrit, au-dessous de chaque nombre, son quotient par ce diviseur. On obtient ainsi une nouvelle ligne de nombres sur lesquels on opère comme sur les nombres donnés, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des nombres premiers entre eux. Le produit des diviseurs écrits dans la colonne verticale à droite est le plus grand commun diviseur des nombres donnés.

200. Théorème II. *Le plus petit commun multiple de plusieurs nombres est égal au produit de tous leurs facteurs premiers, pris chacun avec son plus grand exposant.*

Soient les trois nombres

$$\mathbf{45} = 3^2 \times 5, \quad \mathbf{48} = 2^4 \times 3, \quad \mathbf{56} = 2^3 \times 7.$$

Je dis, en premier lieu, que tout multiple commun à ces trois nombres doit contenir *tous* les facteurs premiers qui entrent dans ces nombres, savoir, 2, 3, 5, 7.

En effet, un nombre qui ne renfermerait pas le facteur premier 7, par exemple, ne serait pas divisible par le nombre 56, dans lequel entre ce facteur 7 (**193**).

Je dis, en second lieu, que chacun de ces facteurs premiers 2, 3, 5, 7 doit recevoir un exposant *au moins* égal à celui qu'il a dans le nombre où il entre avec le plus grand exposant : ainsi 2 doit avoir un exposant au moins égal à 4, 3 un exposant au moins égal à 2, 5 et 7 un exposant au moins égal à 1.

En effet, un nombre qui renfermerait le facteur 2 avec l'exposant 3, par exemple, ne serait pas divisible par le nombre 48, dans lequel ce facteur entre avec un exposant plus grand (**193**).

Il suit de là que le plus petit commun multiple des nombres 45, 48 et 56 est $\mathbf{2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 5040}$.

Il résulte, de la proposition précédente, que *le plus petit commun multiple de deux nombres premiers entre eux, et,* plus généralement, *de plusieurs nombres premiers entre eux deux à deux, est égal à leur produit* (**185** et **187**).

Ainsi le plus petit commun multiple des nombres $\mathbf{27} = 3^3$, $\mathbf{77} = 7.11$, $\mathbf{80} = 2^4.5$, est $3^3 \times 7.11 \times 2^4.5$, ou $\mathbf{27 \times 77 \times 80}$.

201. Dans la pratique, la recherche du plus petit commun multiple de plusieurs nombres, par la méthode de décomposition en facteurs premiers, peut être opérée comme il suit :

Soit à trouver le plus petit commun multiple des nombres 24, 28, 36, 45, 75, 80.

24	28	36	45	75	80	**2**
12	14	18	15	25	40	**2**
6	7	9	5	5	20	**2**
3	1	3	1	1	10	**2**
1		1			5	**3**
					1	**3 5 5 7**

Ayant écrit ces six nombres sur une même ligne horizontale, on remarque que les quatre nombres 24, 28, 36, 80 sont divisibles par le nombre premier 2 : on écrit, dans une colonne verticale à droite, le diviseur **2**, et, au-dessous des nombres 24, 28, 36, 80, les quotients 12, 14, 18, 40 de leur division par 2.

Les nombres 12, 14, 18, 40 sont encore divisibles par 2 : on écrit, une deuxième fois, dans la colonne verticale à droite, le diviseur **2**, et, au-dessous des nombres 12, 14, 18, 40, les quotients 6, 7, 9, 20 de leur division par 2.

Les nombres 6 et 20 sont encore divisibles par 2 : on écrit, une troisième fois, dans la colonne verticale à droite, le diviseur **2**, et, au-dessous des nombres 6 et 20, les quotients 3 et 10 de leur division par 2.

Le nombre 10 est encore divisible par 2 : on écrit, une quatrième fois, dans la colonne verticale à droite, le diviseur **2**, et, au-dessous du nombre 10, le quotient 5 de sa division par 2.

Aucun des nombres 3, 7, 9, 45, 75, 5 n'est divisible par 2, mais les nombres 3, 9, 45, 75 sont divisibles par le nombre premier 3 : on écrit, dans la colonne verticale à droite, le diviseur **3**, et, au-dessous des nombres 3, 9, 45, 75, les quotients 1, 3, 15, 25 de leur division par 3.

Les nombres 3 et 15 sont encore divisibles par 3 : on écrit, une seconde fois, dans la colonne verticale à droite, le diviseur **3**, et, au-dessous des nombres 3 et 15, les quotients 1 et 5 de leur division par 3.

On continue de la sorte jusqu'à ce que le quotient 1 soit écrit sous chaque nombre : *le produit de tous les diviseurs premiers écrits dans la colonne verticale à droite est le plus petit commun multiple des nombres donnés.*

Mais il est encore plus simple d'opérer de la manière suivante :

24	28	36	45	75	80	**12**
2	7	3	15	25	20	**10**
	7		**3**	**5**	**2**	

Ayant écrit, comme précédemment, les six nombres 24, 28, 36, 45, 75, 80 sur une même ligne horizontale, on écrit, dans une colonne verticale à droite, *un diviseur quelconque de l'un de ces nombres,* le diviseur **12** du nombre 24, par exemple.

On divise chacun des nombres donnés par 12, ou, s'ils ne sont pas divisibles par 12, par le plus grand diviseur qui leur est commun avec 12 : ainsi l'on divise 24 par 12, 28 par 4, 36 par 12, 45 par 3, 75 par 3, 80 par 4, et on écrit, au-dessous de chaque nombre, le quotient correspondant : ces quotients sont 2, 7, 3, 15, 25, 20.

On barre le nombre 2, diviseur de 20, et le nombre 3, diviseur de 15 (**183**), et on écrit, dans la colonne verticale à droite, un diviseur quelconque de l'un des nombres 7, 15, 25, 20, le diviseur **10** du nombre 20, par exemple.

On divise chacun de ces nombres par le plus grand diviseur qui leur est commun avec 10, et on écrit au-dessous le quotient correspondant : ces quotients sont 7, 3, 5, 2.

Les nombres 7, 3, 5, 2 sont premiers entre eux deux à deux : donc le plus petit commun multiple cherché est $\mathbf{7 \times 3 \times 5 \times 2 \times 12 \times 10}$ ou **25200**, c'est-à-dire *le produit des nombres* **7, 3, 5, 2,** *écrits dans la dernière ligne horizontale, et des nombres* **12, 10,** *écrits dans la colonne verticale à droite.*

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour trouver le plus petit commun multiple de plusieurs nombres, on écrit ces nombres sur une même ligne horizontale, en barrant ceux qui sont diviseurs de l'un des autres nombres. On écrit, dans une colonne verticale à droite, un diviseur quelconque de l'un des nombres donnés, et on écrit, au-dessous de chaque nombre, son quotient par le plus grand facteur qui lui est commun avec ce diviseur. On obtient ainsi une nouvelle ligne de nombres sur lesquels on opère comme sur les nombres donnés, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des nombres premiers entre eux deux à deux. Le produit des nombres de la dernière ligne horizontale et des diviseurs écrits dans la colonne verticale à droite est le plus petit commun multiple des nombres donnés.

202. Théorème III. *Le produit de deux nombres est égal au produit de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur.*

En effet, le plus grand commun diviseur de deux nombres est égal au produit de leurs facteurs premiers communs, pris respectivement avec leurs plus petits exposants (**197**), et leur plus petit commun multiple est égal au produit de leurs facteurs premiers, communs ou non communs, pris respectivement avec leurs plus grands exposants (**200**). Il résulte de là que tous les facteurs premiers des deux nombres se retrouvent, avec leurs exposants, soit dans le plus grand commun diviseur, soit dans le plus petit commun multiple. Donc le produit des deux nombres est égal à celui de leur plus petit commun multiple par leur plus grand commun diviseur (*).

On déduit de là que *le plus petit commun multiple de deux nombres est égal à leur produit divisé par leur plus grand commun diviseur* : proposition qui a déjà été établie par d'autres considérations (**184**).

(*) Plus généralement, le produit de n nombres est égal au produit de leur plus petit commun multiple par le plus grand commun diviseur de leurs produits $n-1$ à $n-1$.

LIVRE TROISIÈME

LES FRACTIONS ORDINAIRES

—

CHAPITRE I

DES FRACTIONS ORDINAIRES

203. On nomme *fraction ordinaire une ou plusieurs parties de l'unité divisée en parties égales.*

Si, par exemple, on divise l'unité en 7 parties égales, et que l'on prenne 5 de ces parties, on aura la fraction *cinq septièmes.*

Le nombre qui indique en combien de parties égales on a partagé l'unité s'appelle le *dénominateur* de la fraction, et le nombre qui indique combien on a pris de ces parties s'appelle le *numérateur* de la fraction.

Dans l'exemple donné, 7 est le dénominateur et 5 le numérateur.

Le numérateur et le dénominateur sont appelés les deux *termes* de la fraction.

L'appellation de *nombres,* qui n'a été jusqu'ici appliquée qu'aux *nombres entiers,* sera désormais étendue aux *fractions.*

204. *Pour écrire une fraction, on écrit le numérateur, puis, au-dessous, le dénominateur, et on sépare les deux nombres par un trait horizontal* (*).

La fraction *cinq septièmes,* par exemple, s'écrira $\frac{5}{7}$.

Réciproquement, *pour énoncer une fraction, on énonce le numérateur, puis le dénominateur, en ajoutant à celui-ci la terminaison* ième.

La fraction $\frac{9}{13}$, par exemple, s'énoncera : *neuf treizièmes.*

(*) La *barre* de fraction a été employée par LÉONARD FIBONACCI, de Pise, en 1202; elle est probablement due aux Hindous.

Il y a exception lorsque le dénominateur est l'un des nombres 2, 3, 4 : on dit alors *demi, tiers, quart* au lieu de *deuxième, troisième, quatrième.*

Ainsi les fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ se lisent : *un demi, deux tiers, trois quarts.*

Pour énoncer une fraction, on peut encore énoncer le numérateur, puis le mot sur, *et enfin le dénominateur.*

Cette règle est surtout employée lorsque le dénominateur est un grand nombre. Elle l'est encore, lorsque le numérateur ou le dénominateur sont donnés par des opérations indiquées.

205. Il suit, de la nature de la fraction :

1° Que *lorsque le numérateur d'une fraction est plus petit que le dénominateur, la fraction est plus petite que l'unité;*

2° Que *lorsque le numérateur est égal au dénominateur, la fraction est égale à l'unité;*

3° Que *lorsque le numérateur est plus grand que le dénominateur, la fraction est plus grande que l'unité;*

4° Que *lorsque plusieurs fractions ont le même dénominateur, celle-là est la plus grande qui a le plus grand numérateur;*

5° Que *lorsque plusieurs fractions ont le même numérateur, celle-là est la plus grande qui a le plus petit dénominateur.*

206. Toute fraction plus petite que l'unité s'appelle *fraction proprement dite.* Exemple : $\frac{5}{7}$.

Toute fraction égale à l'unité, ou plus grande que l'unité, s'appelle *expression fractionnaire.* Exemples : $\frac{7}{7}$, $\frac{25}{7}$.

Enfin, tout nombre, composé d'un entier et d'une fraction proprement dite, s'appelle *nombre fractionnaire.* Exemple : $3\frac{4}{7}$.

207. Problème I. *Convertir un nombre entier en une fraction de dénominateur donné.*

Soit, par exemple, à réduire le nombre 6 en neuvièmes.

Puisqu'une unité vaut 9 neuvièmes, 6 unités vaudront 6 fois 9 neuvièmes, ou **54** neuvièmes. On a donc

$$6 = \frac{9 \times 6}{9} = \frac{54}{9}.$$

On conclut de là la règle suivante :

Pour convertir un nombre entier en une fraction de dénominateur donné, on prend pour numérateur de la fraction demandée le produit de son dénominateur par le nombre entier.

208. Problème II. *Convertir une expression fractionnaire en nombre fractionnaire.*

Soit, par exemple, l'expression fractionnaire $\frac{25}{7}$.

Puisqu'une unité vaut 7 septièmes, il y a autant d'unités dans 25 septièmes que 7 septièmes sont contenus de fois dans 25 septièmes. Or 25 contient 7 3 fois, et il y a un reste 4. Il s'ensuit que 25 septièmes valent **3** unités et **4** septièmes. On a donc

$$\frac{25}{7} = 3 + \frac{4}{7}.$$

On conclut de là la règle suivante :

Pour convertir une expression fractionnaire en nombre fractionnaire, on divise le numérateur par le dénominateur : l'expression fractionnaire est égale au quotient entier, plus une fraction ayant pour numérateur le reste de la division et pour dénominateur celui de l'expression fractionnaire.

Lorsque le reste est nul, c'est-à-dire *lorsque le numérateur est divisible par le dénominateur, la fraction se réduit à un nombre entier.*

209. Problème III. *Convertir un nombre fractionnaire en expression fractionnaire.*

Soit, par exemple, le nombre fractionnaire $4\frac{5}{9}$.

Puisqu'une unité vaut 9 neuvièmes, 4 unités valent 4 fois 9 neuvièmes, ou 36 neuvièmes, et le nombre $4\frac{5}{9}$ vaut 36 plus 5 ou **41** neuvièmes. On a donc

$$4 + \frac{5}{9} = \frac{9.4 + 5}{9} = \frac{41}{9}.$$

On conclut de là la règle suivante :

Pour convertir un nombre fractionnaire en expression fractionnaire, on multiplie le dénominateur de la fraction par l'entier ; on ajoute au produit le numérateur, et on donne pour dénominateur à la somme obtenue celui de la fraction qui accompagne l'entier.

210. Théorème I. *Toute fraction est égale au quotient de la division de son numérateur par son dénominateur.*

On entend ici, par *division, le partage d'un nombre en plusieurs parties égales* (**61**).

Je dis, par exemple, que la fraction $\frac{5}{7}$ est égale au quotient de 5 par 7, ou à *la 7e partie de 5 unités.*

En effet, une unité valant 7 septièmes, 5 unités valent 5 fois 7 septièmes, ou 35 septièmes. La 7e partie de 5 unités est donc la même chose que la 7e partie de 35 septièmes, ou que 5 septièmes.

Il résulte de ce théorème que les notations $\frac{5}{7}$ et 5 : 7 sont équivalentes.

211. Problème I. *Trouver le quotient complet de la division de deux nombres entiers.*

Soit proposé, par exemple, de diviser 68 par 7, c'est-à-dire de trouver *la 7e partie de 68 unités.*

D'après le théorème précédent, le quotient de 68 par 7 est égal à l'expression fractionnaire $\frac{68}{7}$. Or, le quotient entier de 68 par 7 étant 9 et le reste 5, l'expression fractionnaire $\frac{68}{7}$ est égale au nombre fractionnaire $9\frac{5}{7}$ (**208**) : c'est ce nombre fractionnaire qu'on appelle le *quotient complet* de la division de 68 par 7.

On conclut de là la règle suivante :

Pour avoir le quotient complet de la division de deux nombres entiers, on ajoute au quotient entier la fraction qui a pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur.

Propriétés des fractions.

212. Théorème II. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le numérateur d'une fraction par un nombre entier, la fraction devient ce nombre de fois plus grande ou plus petite.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{6}{9}$: je dis que, si l'on multiplie le numérateur 6 par 4, la nouvelle fraction $\frac{24}{9}$ sera quatre fois plus grande que $\frac{6}{9}$.

En effet, les fractions $\frac{24}{9}$ et $\frac{6}{9}$, ayant le même dénominateur 9, contiennent chacune un certain nombre des mêmes parties de l'unité. D'ailleurs,

le numérateur 24 étant égal à quatre fois le numérateur 6, la fraction $\frac{24}{9}$ contient quatre fois autant de ces parties que la fraction $\frac{6}{9}$. Donc la fraction $\frac{24}{9}$ est quatre fois plus grande que la fraction $\frac{6}{9}$.

On démontrerait, de même, que, si l'on divise le numérateur 6 par un certain nombre, par 3, par exemple, la nouvelle fraction $\frac{2}{9}$ sera trois fois plus petite que $\frac{6}{9}$.

213. Théorème III. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dénominateur d'une fraction par un nombre entier, la fraction devient ce nombre de fois plus petite ou plus grande.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{6}{9}$: je dis que, si l'on multiplie le dénominateur 9 par 4, la nouvelle fraction $\frac{6}{36}$ sera quatre fois plus petite que $\frac{6}{9}$.

En effet, les fractions $\frac{6}{36}$ et $\frac{6}{9}$, ayant le même numérateur 6, contiennent chacune un même nombre de parties égales de l'unité. D'ailleurs, le dénominateur 36 étant quatre fois plus grand que le dénominateur 9, les parties de l'unité, dans la fraction $\frac{6}{36}$, sont quatre fois plus petites que dans la fraction $\frac{6}{9}$. Donc la fraction $\frac{6}{36}$ est quatre fois plus petite que la fraction $\frac{6}{9}$.

On démontrerait, de même, que, si l'on divise le dénominateur 9 par un certain nombre, par 3, par exemple, la nouvelle fraction $\frac{6}{3}$ sera trois fois plus grande que la fraction $\frac{6}{9}$.

214. Théorème IV. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux termes d'une fraction par un même nombre entier, la fraction ne change pas de valeur.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{6}{9}$. Multiplions le numérateur 6 de cette fraction par 4, ce qui donne $\frac{24}{9}$; puis multiplions le dénominateur 9 de la fraction $\frac{24}{9}$ par 4, ce qui donne $\frac{24}{36}$. Je dis que la fraction $\frac{24}{36}$ est égale à la fraction $\frac{6}{9}$.

En effet, la fraction $\frac{6}{9}$, ayant un numérateur 4 fois plus petit que celui de la fraction $\frac{24}{9}$, est 4 fois plus petite que $\frac{24}{9}$ (**212**).

La fraction $\frac{24}{36}$, ayant un dénominateur 4 fois plus grand que celui de la fraction $\frac{24}{9}$, est 4 fois plus petite que $\frac{24}{9}$ (**213**).

Les deux fractions $\frac{6}{9}$ et $\frac{24}{36}$ sont donc l'une et l'autre 4 fois plus petites que $\frac{24}{9}$: donc elles sont égales entre elles.

On démontrerait, de même, qu'en divisant le numérateur 6 et le dénominateur 9 par un même nombre, par 3, par exemple, on forme une fraction $\frac{2}{3}$ égale à la fraction $\frac{6}{9}$.

On suppose, dans les trois théorèmes qui précèdent, que la division du numérateur et du dénominateur par le nombre entier se fait sans reste.

215. Théorème V. *Lorsqu'on ajoute un même nombre entier aux deux termes d'une fraction, cette fraction augmente, si elle est plus petite que l'unité, et elle diminue, si elle est plus grande que l'unité;* au contraire, *lorsqu'on retranche un même nombre entier des deux termes d'une fraction, cette fraction diminue, si elle est plus petite que l'unité, et elle augmente, si elle est plus grande que l'unité.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{5}{8}$, dont le numérateur 5 est moindre que le dénominateur 8 : cette fraction est moindre que l'unité, et elle en diffère de $\frac{8}{8}$ moins $\frac{5}{8}$, ou de $\frac{3}{8}$. Le numérateur **3** de cette différence est égal à la différence des deux termes de la fraction $\frac{5}{8}$.

Si l'on ajoute un même nombre, 4, par exemple, aux deux termes de la fraction $\frac{5}{8}$, on obtient la fraction $\frac{9}{12}$, dans laquelle le numérateur 9 est moindre que le dénominateur 12 : la fraction $\frac{9}{12}$ est donc aussi moindre que l'unité, et elle en diffère de $\frac{12}{12}$ moins $\frac{9}{12}$, ou de $\frac{3}{12}$. Le numérateur **3** de cette différence est égal à la différence des deux termes de la fraction $\frac{9}{12}$, et, par suite, égal au numérateur de la différence précédente ; car, *quand on augmente deux nombres d'une même quantité, leur différence ne change pas* (**28**,4°).

Ainsi la fraction $\frac{5}{8}$ diffère de l'unité de $\frac{3}{8}$, et la fraction $\frac{9}{12}$ diffère de l'unité de $\frac{3}{12}$. Ces deux différences ayant le même numérateur, la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur, c'est-à-dire $\frac{3}{12}$. La fraction $\frac{9}{12}$ diffère donc moins de l'unité que la fraction $\frac{5}{8}$: donc elle est plus grande que $\frac{5}{8}$.

Ainsi, *quand on ajoute un même nombre aux deux termes d'une fraction plus petite que l'unité, cette fraction augmente.*

On démontrerait de la même manière les autres parties du théorème.

CHAPITRE II

SIMPLIFICATION DES FRACTIONS

216. *Simplifier une fraction,* ou *la réduire à une plus simple expression,* c'est la remplacer par une fraction égale, ayant des termes plus petits.

On simplifie une fraction en divisant ses deux termes par un même nombre (**214**).

Ainsi, en divisant les deux termes de la fraction $\frac{24}{36}$ par 6, on obtient la fraction égale mais plus simple $\frac{4}{6}$.

On dit qu'une fraction est *irréductible,* ou *réduite à sa plus simple expression,* lorsqu'elle ne peut être simplifiée.

217. Théorème I. *Les deux termes d'une fraction irréductible sont premiers entre eux.*

Car, s'ils n'étaient pas premiers entre eux, ils admettraient un ou plusieurs communs diviseurs, et, en divisant les deux termes de la fraction par l'un de ces communs diviseurs, on la réduirait à une plus simple expression : cette fraction ne serait donc pas irréductible, ce qui est contre l'hypothèse.

***218.** Lorsqu'une fraction a ses deux termes premiers entre eux, on voit bien qu'on ne peut la simplifier *par la division de ses deux termes par un même nombre;* mais il n'est pas également clair qu'on ne puisse la simplifier *par un autre moyen,* en retranchant, par exemple, de ses deux termes des nombres convenables. La réciproque du théorème précédent n'est donc pas évidente : elle ne pourra être établie qu'après la démonstration du théorème qui va suivre.

219. Théorème II. *Lorsqu'une fraction, dont les deux termes sont premiers entre eux, est égale à une autre fraction, les deux termes de celle-ci sont des équimultiples des deux termes de la première.*

Soient, par exemple, $\frac{4}{9}$ une fraction dont les deux termes sont premiers entre eux, et $\frac{a}{b}$ une fraction égale à $\frac{4}{9}$: je dis que les termes a et b de la seconde fraction sont des *équimultiples* des termes 4 et 9 de la première, c'est-à-dire que a et b sont égaux respectivement aux produits de 4 et de 9 par un même nombre entier.

En effet, on a, par hypothèse,

$$\frac{4}{9} = \frac{a}{b}.$$

Multiplions les deux termes de la première fraction par b et les deux termes de la seconde par 9; on aura (**214**)

$$\frac{4 \times b}{9 \times b} = \frac{a \times 9}{b \times 9}.$$

Ces deux fractions égales ayant le même dénominateur (**42**), elles ont aussi des numérateurs égaux. Donc

$$4 \times b = a \times 9.$$

Ces deux produits étant égaux, le nombre 4, qui divise le premier $4 \times b$, doit diviser aussi le second $a \times 9$. Mais, par hypothèse, 4 est premier avec 9. Donc 4 doit diviser a (**176**).

Le nombre a est donc égal au produit de 4 par un certain nombre entier m, et on peut, dans la dernière égalité, remplacer a par $4 \times m$ (**59**), ce qui donne

$$4 \times b = 4 \times m \times 9,$$

ou, en divisant ces deux produits égaux par 4 (**79**),

$$b = m \times 9 \qquad \text{ou} \qquad b = 9 \times m.$$

Le nombre b est donc aussi égal au produit de 9 par le nombre entier m.

Ainsi les deux termes a et b de la fraction $\frac{a}{b}$ sont respectivement les produits des deux termes 4 et 9 de la fraction $\frac{4}{9}$ par un même nombre entier m : c'est ce qu'il fallait démontrer.

220. Théorème III. *Lorsque les deux termes d'une fraction sont premiers entre eux, cette fraction est irréductible.*

La fraction $\frac{18}{35}$, par exemple, dont les deux termes sont premiers entre eux, est irréductible.

En effet, les deux termes de toute fraction égale à $\frac{18}{35}$, étant des équimultiples de 18 et de 35 (**219**), ne peuvent être moindres que 18×1 et 35×1, ou que 18 et 35 : donc la fraction $\frac{18}{35}$ ne peut être simplifiée.

221. Problème. *Réduire une fraction à sa plus simple expression.*

Soit à réduire la fraction $\frac{27027}{72072}$ à sa plus simple expression.

On détermine le plus grand commun diviseur 9009 des deux termes de cette fraction (**165**), et on les divise par ce plus grand commun diviseur : les quotients 3 et 8 sont premiers entre eux (**175**), et la fraction $\frac{3}{8}$, égale à la fraction proposée (**214**), est irréductible (**220**).

On conclut de là la règle suivante :

Pour réduire une fraction à sa plus simple expression, on divise ses deux termes par leur plus grand commun diviseur.

Dans la pratique, il est ordinairement préférable de *supprimer successivement les facteurs communs que l'on aperçoit aux deux termes de la fraction.*

Soit encore la fraction $\frac{27027}{72072}$.

Les deux termes de cette fraction étant divisibles par 9, on peut la remplacer par la fraction $\frac{3003}{8008}$, et, les deux termes de celle-ci étant divisibles par 1001, on peut la remplacer à son tour par la fraction $\frac{3}{8}$: celle-ci, ayant ses deux termes premiers entre eux, est irréductible.

222. Lorsqu'on a une fraction, telle que $\frac{15}{3}$, dont le numérateur est un multiple du dénominateur, si l'on divise les deux termes de cette fraction par le dénominateur, on arrive à une expression, telle que $\frac{5}{1}$, dont le dénominateur est l'unité.

L'expression $\frac{5}{1}$ n'a pas de sens par elle-même (**203**) ; mais, comme la fraction $\frac{15}{3}$ est égale à 15 : 3 ou à 5 (**208** ou **210**), on convient de regarder les expressions 5 et $\frac{5}{1}$ comme synonymes.

Ainsi *tout nombre entier peut être considéré comme une fraction ayant pour numérateur cet entier et pour dénominateur l'unité.*

Cette manière de voir permet de généraliser les propositions et les règles de calcul relatives aux fractions.

CHAPITRE III

DE LA RÉDUCTION DE PLUSIEURS FRACTIONS A UN MÊME DÉNOMINATEUR

223. *Réduire plusieurs fractions à un même dénominateur,* c'est les remplacer par des fractions égales, ayant un même dénominateur.

224. Problème I. *Réduire deux fractions à un même dénominateur.*

Soit à réduire à un même dénominateur les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{5}{7}$.

On multiplie les deux termes de la première fraction par le dénominateur 7 de la seconde, et les deux termes de la seconde par le dénominateur 4 de la première. On obtient ainsi les deux fractions $\frac{21}{28}$ et $\frac{20}{28}$, égales aux fractions proposées (**214**), et ayant un même dénominateur, savoir, le produit des dénominateurs des deux fractions données (**42**).

On conclut de là la règle suivante :

Pour réduire deux fractions à un même dénominateur, on multiplie les deux termes de chacune d'elles par le dénominateur de l'autre.

225. Problème II. *Réduire plusieurs fractions à un même dénominateur.*

Soit à réduire à un même dénominateur les fractions

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{5}, \frac{6}{7}.$$

On multiplie les deux termes de chacune de ces quatre fractions par le produit des dénominateurs des trois autres, ce qui donne (**56**)

$$\frac{2.4.5.7}{3.4.5.7}, \frac{3.3.5.7}{4.3.5.7}, \frac{8.3.4.7}{5.3.4.7}, \frac{6.3.4.5}{7.3.4.5},$$

ou, en effectuant les multiplications indiquées,

$$\frac{280}{420}, \frac{315}{420}, \frac{672}{420}, \frac{360}{420}.$$

Ces nouvelles fractions sont égales aux fractions proposées (**214**), et elles ont le même dénominateur, savoir, le produit des dénominateurs de toutes les fractions données (**55**).

On conclut de là la règle suivante :

Pour réduire plusieurs fractions à un même dénominateur, on multiplie les deux termes de chacune d'elles par le produit des dénominateurs de toutes les autres.

226. Problème III. *Réduire deux ou plusieurs fractions au plus petit commun dénominateur.*

Soit à réduire au plus petit commun dénominateur les fractions

$$\frac{25}{30}, \frac{20}{32}, \frac{21}{36}, \frac{24}{45}, \frac{27}{60}.$$

On commence par réduire ces fractions à leur plus simple expression, ce qui donne

$$\frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{8}{15}, \frac{9}{20}.$$

Cela posé, le dénominateur de toute fraction égale à la fraction irréductible $\frac{5}{6}$ est un multiple de 6 (**219**); le dénominateur de toute fraction égale à $\frac{5}{8}$ est un multiple de 8, et ainsi de suite. Donc tout commun dénominateur des cinq fractions données est un commun multiple de leurs dénominateurs 6, 8, 12, 15, 20, et, par suite, le plus petit commun dénominateur de ces fractions est le plus petit commun multiple de ces cinq nombres, ou **120**.

Pour ramener chaque fraction à avoir pour dénominateur 120, on divise 120 par chacun des dénominateurs 6, 8, 12, 15, 20, et on multiplie chaque numérateur par le quotient correspondant. On obtient ainsi les fractions

$$\frac{5 \times 20}{120}, \frac{5 \times 15}{120}, \frac{7 \times 10}{120}, \frac{8 \times 8}{120}, \frac{9 \times 6}{120},$$

ou

$$\frac{100}{120}, \frac{75}{120}, \frac{70}{120}, \frac{64}{120}, \frac{54}{120},$$

lesquelles sont les fractions demandées.

On conclut de là la règle suivante :

Pour réduire deux ou plusieurs fractions au plus petit commun dénominateur, on commence par réduire ces fractions à leur plus simple expression ; puis on cherche le plus petit commun multiple des dénominateurs des fractions irréductibles obtenues (**183, 185, 186, 200, 201**) : *ce plus petit commun multiple est le plus petit commun dénominateur des fractions proposées. On divise ce plus petit commun dénominateur par le dénominateur de chaque fraction irréductible, et on multiplie le numérateur correspondant par le quotient obtenu.*

Lorsque le plus petit commun multiple des dénominateurs a été trouvé par la décomposition de ces nombres en leurs facteurs premiers (**200**), on obtient le quotient de la division de ce plus petit commun multiple par un dénominateur quelconque en supprimant, dans le plus petit commun multiple, tous les facteurs de ce dénominateur (**80** et **79**), et en effectuant le produit des facteurs restants.

Lorsque les dénominateurs de plusieurs fractions irréductibles sont premiers entre eux deux à deux, leur plus petit commun multiple est égal à leur produit (**185, 187, 200**) : la règle qui précède rentre alors dans celles qui ont été d'abord données (**224** et **225**).

CHAPITRE IV

ADDITION & SOUSTRACTION DES FRACTIONS

227. On peut effectuer, sur les fractions, les mêmes opérations que sur les nombres entiers. Seulement, les définitions de ces opérations doivent être généralisées.

228. L'*addition*, en général, est une *opération qui a pour but de former un nombre renfermant toutes les unités et parties d'unité contenues dans plusieurs nombres donnés.*

On a, par exemple,

$$\frac{4}{15}+\frac{7}{15}+\frac{14}{15}=\frac{4+7+14}{15}=\frac{25}{15}=\frac{5}{3}=1\frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{12}=\frac{6}{12}+\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{1}{12}=\frac{24}{12}=2;$$

$$2\frac{3}{4}+8\frac{2}{5}+5\frac{11}{12}=2\frac{45}{60}+8\frac{24}{60}+5\frac{55}{60}=15+\frac{124}{60}=15+2\frac{1}{15}=17\frac{1}{15}.$$

Ainsi, *pour additionner des fractions de même dénominateur, on additionne les numérateurs et on donne à la somme pour dénominateur le dénominateur commun.*

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commence par les réduire à un commun dénominateur, et on applique la même règle.

Enfin, s'il y a des nombres fractionnaires, on fait séparément la somme des fractions et celle des entiers, en ajoutant à cette seconde somme, s'il y a lieu, l'entier contenu dans la première.

229. La *soustraction,* en général, est une *opération qui a pour but de retrancher d'un nombre donné toutes les unités et parties d'unité contenues dans un autre nombre donné.*

On peut dire encore : *la soustraction a pour but, connaissant la somme de deux nombres et l'un de ces nombres, de trouver l'autre.*

On a, par exemple,

$$\frac{13}{18}-\frac{5}{18}=\frac{13-5}{18}=\frac{8}{18}=\frac{4}{9};$$

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{9}{12}-\frac{8}{12}=\frac{1}{12};$$

$$9\frac{7}{12}-4\frac{7}{15}=9\frac{35}{60}-4\frac{28}{60}=5\frac{7}{60};$$

$$8\frac{4}{7}-3\frac{6}{7}=8\frac{11}{7}-4\frac{6}{7}=4\frac{5}{7};$$

$$10-3\frac{4}{5}=10\frac{5}{5}-4\frac{4}{5}=6\frac{1}{5}.$$

Ainsi, *pour soustraire l'une de l'autre deux fractions de même dénominateur, on soustrait le numérateur de la seconde du numérateur de la première, et on donne à la différence pour dénominateur le dénominateur commun.*

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commence par les réduire à un commun dénominateur, et on applique la même règle.

Enfin, s'il s'agit de nombres fractionnaires, on fait séparément la soustraction des fractions et celle des entiers. Si la fraction à soustraire surpasse celle dont il faut la soustraire, on augmente celle-ci d'une unité, en ajoutant son dénominateur à son numérateur; mais, pour ne pas changer la différence cherchée, on augmente aussi d'une unité la partie entière du nombre que l'on soustrait (*).

CHAPITRE V

MULTIPLICATION DES FRACTIONS

230. *Multiplier un nombre quelconque par un nombre entier,* c'est *prendre ce nombre autant de fois qu'il y a d'unités dans le nombre entier.*

Cette définition coïncide avec celle qui a été donnée pour les nombres entiers (**37**).

Soit proposé, par exemple, de *multiplier la fraction* $\frac{4}{9}$ *par* 5.

Multiplier la fraction $\frac{4}{9}$ par 5, c'est la prendre 5 fois, ou la rendre 5 fois plus grande. Or, pour rendre une fraction 5 fois plus grande, il suffit de multiplier son numérateur par 5 (**212**). On a donc

$$\frac{4}{9} \times 5 = \frac{4 \times 5}{9} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}.$$

Soit aussi proposé de *multiplier le nombre fractionnaire* $8\frac{4}{7}$ *par* 5.

Multiplier $8\frac{4}{7}$ par 5, c'est prendre 5 fois la somme $8 + \frac{4}{7}$. On a donc

$$8\frac{4}{7} \times 5 = 8.5 + \frac{4}{7}.5 = 40 + \frac{20}{7} = 40 + 2\frac{6}{7} = 42\frac{6}{7}.$$

(*) Par exemple, pour soustraire $5\frac{23}{27}$ de $9\frac{8}{27}$, on dit : 27 et 8 35, 23 de 35 12 (on écrit $\frac{12}{27}$); 6 de 9 3 (on écrit 3). Mais il est encore plus simple de dire : 23 de 27 4, et 8 12; 6 de 9 3; ce qui revient à remplacer 27 + 8 — 23 par 27 — 23 + 8.

On peut aussi convertir le nombre fractionnaire $8\frac{4}{7}$ en expression fractionnaire, ce qui ramène au cas précédent.

231. Lorsque le multiplicateur est une fraction, la définition donnée précédemment n'a plus de sens : car *un nombre de fois* est nécessairement *entier*. On a adopté la définition suivante :

Multiplier un nombre quelconque par une fraction, c'est *prendre cette fraction du nombre donné;* en d'autres termes, c'est *partager ce nombre en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans le dénominateur, et prendre autant de ces parties qu'il y a d'unités dans le numérateur* (*).

La multiplication ainsi entendue n'est plus une opération simple, mais une double opération, savoir, la *division* du nombre par le dénominateur de la fraction, et la *multiplication* du quotient obtenu par le numérateur. On a donné à l'ensemble de ces deux opérations le nom de la deuxième.

Ainsi, multiplier un nombre par $\frac{4}{7}$, c'est prendre les $\frac{4}{7}$ de ce nombre; en d'autres termes, c'est diviser ce nombre par 7, puis multiplier le quotient obtenu par 4.

Mais, pour que la définition nouvelle soit admissible, il faut qu'elle coïncide avec la première (**230**), *lorsque la fraction qui sert de multiplicateur se réduit à un nombre entier* (**208** ou **210**).

Il faut prouver, par exemple, que multiplier un nombre par la fraction $\frac{35}{7}$, selon la nouvelle définition, revient à le multiplier par le nombre entier 5, selon la première définition.

En effet, d'après la nouvelle définition, multiplier un nombre par $\frac{35}{7}$, c'est en prendre 35 fois le septième. Or, en prenant 7 fois le septième d'un nombre, on reproduit ce nombre. Donc, en prenant 35 fois, ou 5 fois 7 fois, le septième d'un nombre, on obtient 5 fois ce nombre, ou, d'après la première définition, on multiplie ce nombre par 5.

Il est facile de voir que, *suivant que la fraction multiplicateur est inférieure, égale ou supérieure à l'unité, le produit est inférieur, égal ou supérieur au multiplicande.*

(*) Cette nouvelle définition permet de résoudre les questions où, parmi les données, il y a des fractions ou des nombres fractionnaires, *de la même manière que s'il s'agissait de nombres entiers* (**488**).

232. Soit proposé, en premier lieu, de *multiplier le nombre entier* 5 *par la fraction* $\frac{4}{9}$.

Multiplier 5 par $\frac{4}{9}$, c'est prendre les $\frac{4}{9}$ de 5. Or, le neuvième d'une unité étant $\frac{1}{9}$, le neuvième de 5 unités est $\frac{5}{9}$. Donc les $\frac{4}{9}$ de 5 valent 4 fois $\frac{5}{9}$. On est ainsi ramené à multiplier la fraction $\frac{5}{9}$ par le nombre entier 4 (**230**). On a donc

$$5 \times \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \times 4 = \frac{5 \times 4}{9} = \frac{20}{9} = 2\frac{2}{9}.$$

Soit proposé, en second lieu, de *multiplier la fraction* $\frac{5}{7}$ *par la fraction* $\frac{4}{9}$.

Multiplier $\frac{5}{7}$ par $\frac{4}{9}$, c'est prendre les $\frac{4}{9}$ de $\frac{5}{7}$. Or, prendre le neuvième de $\frac{5}{7}$, c'est rendre cette fraction 9 fois plus petite, ce qui se fait en multipliant le dénominateur 7 par 9 (**213**). Le neuvième de $\frac{5}{7}$ est donc $\frac{5}{7 \times 9}$, et, par suite, les $\frac{4}{9}$ de $\frac{5}{7}$ valent 4 fois $\frac{5}{7 \times 9}$. On est ainsi ramené à multiplier la fraction $\frac{5}{7 \times 9}$ par le nombre entier 4 (**230**). On a donc

$$\frac{5}{7} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{7 \times 9} \times 4 = \frac{5 \times 4}{7 \times 9} = \frac{20}{63}.$$

Soit proposé, en troisième lieu, de *multiplier le nombre fractionnaire* $5\frac{2}{3}$ *par la fraction* $\frac{4}{9}$.

Multiplier $5\frac{2}{3}$ par $\frac{4}{9}$, c'est prendre les $\frac{4}{9}$ de la somme $5 + \frac{2}{3}$. On a donc

$$5\frac{2}{3} \times \frac{4}{9} = 5.\frac{4}{9} + \frac{2}{3}.\frac{4}{9} = \frac{20}{9} + \frac{8}{27} = 2\frac{2}{9} + \frac{8}{27} = 2\frac{14}{27}.$$

On peut aussi convertir le nombre fractionnaire $5\frac{2}{3}$ en expression fractionnaire, ce qui ramène au cas précédent.

233. *Multiplier un nombre quelconque par un entier joint à une fraction*, c'est *le prendre autant de fois qu'il y a d'unités dans l'entier, et en prendre, de plus, une fraction égale à celle qui accompagne l'entier.*

Cette définition n'est qu'une conséquence de celles qui ont été données précédemment (**230** et **231**).

Soit proposé, par exemple, de multiplier un nombre quelconque par $5\frac{4}{9}$.

Multiplier un nombre par $5\frac{4}{9}$, c'est prendre 5 fois ce nombre, plus encore les $\frac{4}{9}$ de ce nombre. On multiplie donc un nombre par $5\frac{4}{9}$ en le

multipliant séparément par 5 et par $\frac{4}{9}$, et en faisant la somme des produits obtenus.

Mais multiplier un nombre par 5 est la même chose qu'en prendre les $\frac{45}{9}$ (**231**). Donc multiplier un nombre par $5\frac{4}{9}$, c'est en prendre les $\frac{45}{9}$ plus les $\frac{4}{9}$, ou les $\frac{49}{9}$. Il s'ensuit que, pour multiplier un nombre quelconque par un nombre fractionnaire, on peut encore le multiplier par l'expression fractionnaire équivalente.

On a, par exemple,

$$2\frac{3}{4} \times 4\frac{1}{3} = 2.4 + \frac{3}{4}.4 + 2.\frac{1}{3} + \frac{3}{4}.\frac{1}{3}$$

$$= 8 + 3 + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = 11\frac{11}{12},$$

ou

$$2\frac{3}{4} \times 4\frac{1}{3} = \frac{11}{4} \times \frac{13}{3} = \frac{143}{12} = 11\frac{11}{12}.$$

234. On déduit, des raisonnements qui précèdent, les règles suivantes :

Pour multiplier une fraction par un nombre entier, ou un nombre entier par une fraction, on multiplie le numérateur de la fraction par le nombre entier, et on donne au produit pour dénominateur le dénominateur de la fraction.

Pour multiplier deux fractions, on les multiplie terme à terme; c'est-à-dire *on multiplie le numérateur de la première par le numérateur de la seconde et le dénominateur de la première par le dénominateur de la seconde.*

Si l'un des facteurs ou les deux facteurs sont des nombres fractionnaires, on les convertit en expressions fractionnaires, et on applique les mêmes règles.

235. Lorsque l'un des facteurs est un nombre entier, on peut le remplacer par une fraction ayant pour numérateur cet entier et pour dénominateur l'unité (**222**).

Lorsque l'un des facteurs est un nombre fractionnaire, on peut le remplacer par l'expression fractionnaire équivalente.

On peut donc énoncer la règle générale suivante :

Pour multiplier deux nombres quelconques, on les écrit sous forme de fractions, et on multiplie ces fractions terme à terme.

236. La multiplication d'un nombre par une fraction se fait souvent très simplement par la *méthode des parties aliquotes* (**116** et **478**), c'est-à-dire en décomposant cette fraction *en parties aliquotes de l'unité,* ou *aliquotes les unes des autres.*

Ainsi, pour multiplier un nombre par $\frac{6}{5}$, ou par $1 + \frac{1}{5}$, on augmente ce nombre de son cinquième.

Pour multiplier un nombre par $\frac{5}{6}$, ou par $1 - \frac{1}{6}$, ou par $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, on diminue ce nombre de son sixième, ou bien on fait la somme de la moitié et du tiers de ce nombre.

Pour multiplier un nombre par $\frac{7}{24}$, ou par $\frac{1}{4} + \frac{1}{24}$, on ajoute au quart de ce nombre le sixième du même quart.

Pour multiplier un nombre par $\frac{8}{81}$, ou par $\frac{1}{9} - \frac{1}{81}$, on prend le neuvième de ce nombre, et du quotient on ôte le neuvième de ce neuvième.

Pour multiplier un nombre par $\frac{23}{32}$, ou par $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{32}$, on le diminue de son quart et du huitième de ce quart.

Pour multiplier un nombre par $\frac{89}{600}$, ou par $\frac{1}{6} - \frac{1}{60} - \frac{1}{600}$, on en prend le sixième, puis du quotient on ôte le dixième de ce sixième et le dixième de ce dixième.

Produit de plusieurs nombres.

237. On définit le *produit de plusieurs nombres quelconques* de la même manière que le produit de plusieurs nombres entiers (**54**).

238. *Pour multiplier des nombres quelconques, on les écrit sous forme de fractions, et on multiplie ces fractions terme à terme.*

S'il y a des facteurs communs aux deux termes de la fraction résultante, on les supprime avant d'effectuer les multiplications.

On a, par exemple,

$$3 \times 4\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{1} \times \frac{14}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 14 \times 5 \times 3}{1 \times 3 \times 6 \times 4}$$
$$= \frac{7 \times 5}{4} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}.$$

239. Théorème. *Un produit de nombres quelconques ne change pas, quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

On a, par exemple,

$$3 \times 4\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = 4\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times 3.$$

En effet (**238, 55**),

$$3 \times 4\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{1} \times \frac{14}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{3 \times 14 \times 5 \times 3}{1 \times 3 \times 6 \times 4}$$

$$= \frac{14 \times 3 \times 5 \times 3}{3 \times 4 \times 6 \times 1} = \frac{14}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{1} = 4\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times 3.$$

240. Il suit de là que les théorèmes suivants sont vrais pour des nombres quelconques :

1° *On multiplie un nombre par un produit en le multipliant successivement par les facteurs de ce produit* (**56**);

2° *On multiplie un produit par un produit en formant un produit unique composé de tous les facteurs des deux produits donnés* (**57**);

3° *On peut, dans un produit de plusieurs nombres, remplacer deux ou plusieurs facteurs par leur produit effectué* (**58**);

4° Réciproquement, *on peut, dans un produit de plusieurs nombres, remplacer un facteur quelconque par d'autres dont ce facteur est le produit* (**59**);

5° *Quand on multiplie l'un des facteurs d'un produit par un nombre, le produit est multiplié par ce nombre* (**60**).

CHAPITRE VI

DIVISION DES FRACTIONS

241. La *division*, en général, est une *opération par laquelle, connaissant le produit de deux nombres et l'un de ces nombres, on cherche l'autre.*

Puisqu'un produit ne change pas lorsqu'on intervertit l'ordre de ses facteurs (**239**), on peut supposer que le facteur connu est le multiplicateur, et le facteur inconnu le multiplicande.

Car, si cette manière de voir peut changer le sens même de l'opération, elle ne peut, du moins, changer la valeur du facteur cherché, ce qui est la seule chose que l'on a en vue ici.

On peut donc dire que, *diviser un nombre, appelé* dividende, *par un autre nombre, appelé* diviseur, *c'est chercher un nombre, appelé* quotient, *qui, multiplié par le diviseur, reproduise le dividende.*

Il est entendu que les mots *nombre* et *multiplier* ont ici leur signification la plus générale (**203** et **231**).

242. Théorème I. *Toute fraction peut être regardée comme le quotient de son numérateur par son dénominateur* (**210**).

Dans ce théorème et dans le problème suivant, le mot *quotient* est pris dans son acception la plus générale (**241**).

Je dis, par exemple, que la fraction $\frac{5}{7}$ est égale au quotient de 5 par 7.

En effet, le produit de $\frac{5}{7}$ par 7 est égal à 5 (**234** et **208**) : donc, par définition (**241**), $\frac{5}{7}$ est le quotient de 5 par 7.

Il résulte de ce théorème que les notations 5 : 7 et $\frac{5}{7}$ sont équivalentes.

243. Problème I. *Trouver le quotient complet de la division de deux nombres entiers* (**211**).

Soit à diviser 68 par 7.

D'après le théorème précédent, le quotient de 68 par 7 est égal à la fraction $\frac{68}{7}$. Or, le quotient entier de 68 par 7 étant 9 et le reste 5, on sait (**208**) que l'expression fractionnaire $\frac{68}{7}$ est égale au nombre fractionnaire $\mathbf{9}\frac{5}{7}$: c'est ce nombre fractionnaire qu'on appelle *quotient complet* de la division de 68 par 7.

On conclut de là la règle suivante :

Pour avoir le quotient complet de la division de deux nombres entiers, on ajoute au quotient entier la fraction qui a pour numérateur le reste et pour dénominateur le diviseur.

244. La division, considérée d'une manière générale (**241**), présente trois cas, le diviseur pouvant être un nombre entier, ou une fraction, ou un nombre fractionnaire.

Supposons d'abord que le diviseur soit un *nombre entier*, 5, par exemple.

Le quotient doit être tel que, multiplié par le diviseur 5, il reproduise le dividende. Le dividende est donc égal à 5 fois le quotient. Par suite, le quotient est égal à $\frac{1}{5}$ du dividende, ou (**231**) au produit du dividende par $\frac{1}{5}$.

Ainsi, pour diviser un nombre quelconque par le nombre entier 5, ou par la fraction $\frac{5}{1}$ (**222**), on multiplie ce nombre par $\frac{1}{5}$.

On a, par exemple,

$$8 : 5 = 8 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5};$$

$$\frac{4}{9} : 5 = \frac{4}{9} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{45};$$

$$3\frac{1}{3} : 5 = \frac{10}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{3}.$$

Supposons, en second lieu, que le diviseur soit une *fraction*, $\frac{5}{7}$, par exemple.

Le quotient doit être tel que, multiplié par le diviseur $\frac{5}{7}$, il reproduise le dividende. Or, multiplier un nombre par $\frac{5}{7}$, c'est en prendre les $\frac{5}{7}$. Donc les $\frac{5}{7}$ du quotient égalent le dividende. Par suite, $\frac{1}{7}$ du quotient vaut 5 fois moins, ou $\frac{1}{5}$ du dividende, et le quotient vaut 7 fois plus, ou les $\frac{7}{5}$ du dividende.

Ainsi, pour diviser un nombre quelconque par $\frac{5}{7}$, il faut en prendre les $\frac{7}{5}$, ou (**231**) le multiplier par $\frac{7}{5}$.

On a, par exemple,

$$8 : \frac{5}{7} = 8 \times \frac{7}{5} = \frac{56}{5} = 11\frac{1}{5};$$

$$\frac{4}{9} : \frac{5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{28}{45};$$

$$3\frac{1}{3} : \frac{5}{7} = \frac{10}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}.$$

Enfin, si le diviseur est un *nombre fractionnaire*, on le convertit en expression fractionnaire, et on est ramené au cas précédent.

On déduit, des raisonnements qui précèdent, la règle suivante :

Pour diviser un nombre quelconque par un autre nombre écrit sous forme de fraction, on multiplie ce nombre par la fraction diviseur renversée.

Il résulte de cette règle que, *suivant que le diviseur est inférieur, égal ou supérieur à l'unité, le quotient est supérieur, égal ou inférieur au dividende.*

245. *Lorsque les deux termes de la fraction dividende sont respectivement divisibles par les deux termes de la fraction diviseur, on peut obtenir le quotient de ces deux fractions en les divisant terme à terme.*

On a, par exemple, $\frac{12}{35} : \frac{4}{7} = \frac{12:4}{35:7} = \frac{3}{5}$.

En effet, la fraction $\frac{12}{35}$ peut s'écrire $\frac{3 \times 4}{5 \times 7}$ ou $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$. Or, lorsqu'on divise un produit de deux facteurs par l'un de ses facteurs, le quotient est égal à l'autre facteur. Donc le quotient de $\frac{3}{5} \times \frac{4}{7}$ ou de la fraction donnée par $\frac{4}{7}$ est égal à $\frac{3}{5}$.

Lorsque deux fractions ont le même dénominateur, leur quotient est égal à celui de leurs numérateurs.

On a, par exemple, $\frac{5}{9} : \frac{8}{9} = \frac{5}{8}$.

246. Théorème II. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dividende par un certain nombre, le quotient est multiplié ou divisé par ce nombre.*

Ainsi, le quotient de $\frac{4}{9}$ par $\frac{5}{7}$ étant égal à $\frac{4}{9} \times \frac{7}{5}$, celui de $\frac{4}{9} \times \frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$ sera égal à $\frac{4}{9} \times \frac{7}{5} \times \frac{2}{3}$.

On a, en effet,

$$\left(\frac{4}{9} \times \frac{2}{3}\right) : \frac{5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{5} \times \frac{2}{3}.$$

De même, le quotient de $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7}$ sera égal à $(\frac{4}{9} \times \frac{7}{5}) : \frac{2}{3}$.

En effet, diviser le dividende par $\frac{2}{3}$ revient à le multiplier par $\frac{3}{2}$. Or, d'après ce qu'on vient de voir, en multipliant le dividende par $\frac{3}{2}$, on multiplie le quotient par $\frac{3}{2}$, ou on le divise par $\frac{2}{3}$.

247. Théorème III. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le diviseur par un certain nombre, le quotient est divisé ou multiplié par ce nombre.*

Ainsi, le quotient de $\frac{4}{9}$ par $\frac{5}{7}$ étant égal à $\frac{4}{9} \times \frac{7}{5}$, celui de $\frac{4}{9}$ par $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$ sera égal à $(\frac{4}{9} \times \frac{7}{5}) : \frac{2}{3}$.

On a, en effet,

$$\frac{4}{9} : \left(\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} : \frac{5 \times 2}{7 \times 3} = \frac{4}{9} \times \frac{7 \times 3}{5 \times 2} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{5} \times \frac{3}{2}$$
$$= \left(\frac{4}{9} \times \frac{7}{5}\right) : \frac{2}{3}.$$

De même, le quotient de $\frac{4}{9}$ par $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$ sera égal à $\frac{4}{9} \times \frac{7}{5} \times \frac{2}{3}$.

En effet, diviser le diviseur par $\frac{2}{3}$ revient à le multiplier par $\frac{3}{2}$. Or, d'après ce qu'on vient de voir, en multipliant le diviseur par $\frac{3}{2}$, on divise le quotient par $\frac{3}{2}$, ou on le multiplie par $\frac{2}{3}$.

248. Théorème IV. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise à la fois le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas.*

Ainsi le quotient de $\frac{4}{9} \times \frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$ est égal à celui de $\frac{4}{9}$ par $\frac{5}{7}$.

On a, en effet,

$$\left(\frac{4}{9} \times \frac{2}{3}\right) : \left(\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}\right) = \frac{4 \times 2}{9 \times 3} : \frac{5 \times 2}{7 \times 3} = \frac{4 \times 2}{9 \times 3} \times \frac{7 \times 3}{5 \times 2}$$
$$= \frac{4}{9} \times \frac{7}{5} = \frac{4}{9} : \frac{5}{7}.$$

De même, le quotient de $\frac{4}{9} : \frac{2}{3}$ par $\frac{5}{7} : \frac{2}{3}$ est égal à celui de $\frac{4}{9}$ par $\frac{5}{7}$.

En effet, diviser le dividende et le diviseur par $\frac{2}{3}$ revient à les multiplier par $\frac{3}{2}$, ce qui, comme on vient de le voir, ne change pas le quotient.

Les démonstrations qui précèdent sont générales, car le nombre par lequel on multiplie ou on divise peut toujours être mis sous forme de fraction (**238** et **244**).

***249.** Problème II. *Convertir une fraction ordinaire en une autre de dénominateur donné.*

Soit proposé, par exemple, de convertir la fraction $\frac{19}{23}$ en une autre ayant pour dénominateur 7.

La fraction $\frac{19}{23}$ peut être regardée comme le quotient de 19 par 23 (**242**), ou comme la 23e partie de 19 unités. Or, une unité valant 7 septièmes, 19 unités valent 19 fois 7 septièmes, ou 133 septièmes. La fraction $\frac{19}{23}$, qui

est la 23e partie de 19 unités, vaut donc la 23e partie de 133 septièmes. Or le quotient entier de 133 par 23 est **5**. Donc la fraction $\frac{19}{23}$ est égale à $\frac{5}{7}$, à moins d'un septième par défaut, et à $\frac{6}{7}$, à moins d'un septième par excès.

De plus, le reste **18** de la division de 133 par 23 étant supérieur à la moitié du diviseur, la fraction $\frac{19}{23}$ est égale à $\frac{6}{7}$, à moins d'un demi-septième par excès.

On conclut de là la règle suivante :

Pour convertir une fraction ordinaire en une autre de dénominateur donné, on multiplie le numérateur de la première par le dénominateur de la seconde, et on divise le produit obtenu par le dénominateur de la première : le quotient, pris à moins d'une unité par défaut ou par excès, est le numérateur de la fraction cherchée, à moins d'une unité par défaut ou par excès.

***250.** On appelle *nombres réciproques*, ou *nombres inverses l'un de l'autre, deux nombres dont le produit est égal à l'unité.*

L'inverse d'un nombre, écrit sous forme de fraction, est égal à cette fraction renversée.

Ainsi les inverses des nombres 5, $\frac{3}{4}$, $1\frac{1}{2}$, ou $\frac{5}{1}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}$, sont $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{2}{3}$.

CHAPITRE VII

ÉLÉVATION AUX PUISSANCES ET EXTRACTION DES RACINES DES FRACTIONS

251. On appelle, en général, *puissance deuxième, troisième, quatrième...* d'un nombre, le produit de 2, 3, 4... facteurs égaux à ce nombre.

Réciproquement, on appelle *racine deuxième, troisième, quatrième...* d'un nombre, un autre nombre qui, élevé à la deuxième, troisième, quatrième... puissance, reproduit le premier.

On a, par exemple (**238**),

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2.2.2.2}{3.3.3.3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81},$$

et, réciproquement,

$$\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{81}} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, *pour élever une fraction à une puissance quelconque, on élève les deux termes de cette fraction à cette puissance.*

Et, réciproquement, *pour extraire une racine de degré quelconque d'une fraction, dont les deux termes sont des puissances de ce degré, il suffit d'extraire cette racine de chacun de ses termes.*

Dans ce qui va suivre, nous ne parlerons nommément que des puissances et des racines du second degré, c'est-à-dire des carrés et des racines carrées, quoique tout ce qui sera dit soit également applicable à des puissances et à des racines de degré quelconque.

252. Théorème I. *Le carré d'une fraction irréductible est une fraction irréductible.*

Si la fraction $\frac{a}{b}$, par exemple, est irréductible, son carré $\frac{a^2}{b^2}$ est aussi une fraction irréductible.

En effet, la fraction $\frac{a}{b}$, étant irréductible, a ses deux termes a et b premiers entre eux (**217**). Or, lorsque deux nombres a et b sont premiers entre eux, deux puissances quelconques de ces nombres sont aussi premières entre elles (**178**). Donc la fraction $\frac{a^2}{b^2}$ est irréductible (**220**).

253. Théorème II. *Un nombre entier, qui n'est pas le carré d'un nombre entier, n'est pas non plus le carré d'un nombre fractionnaire.*

Soit, par exemple, le nombre entier 500, qui n'est le carré d'aucun nombre entier : je dis que ce nombre ne peut être le carré d'aucun nombre fractionnaire.

Car, s'il existait un nombre fractionnaire dont le carré fût égal à 500, on pourrait remplacer ce nombre par l'expression fractionnaire irréductible équivalente. Or, d'après le théorème précédent, le carré d'une fraction irréductible est une fraction irréductible, qui, par suite, ne peut

se réduire à un nombre entier. Donc il ne peut y avoir de nombre fractionnaire dont le carré soit égal à 500.

254. Théorème III. *Une fraction irréductible, dont les termes ne sont pas les carrés de deux nombres entiers, n'est le carré d'aucune fraction.*

Soit, par exemple, la fraction irréductible $\frac{16}{27}$, dont les termes ne sont pas tous deux des carrés : je dis que cette fraction ne peut être le carré d'aucune fraction.

Car, s'il existait une fraction dont le carré fût égal à $\frac{16}{27}$, on pourrait supposer cette fraction irréductible. Or, d'après le premier théorème, le carré de cette fraction irréductible serait une autre fraction irréductible, laquelle aurait pour termes deux nombres carrés. Cette fraction ne serait donc pas égale à la fraction irréductible donnée, laquelle n'a pas pour termes deux nombres carrés : car deux fractions irréductibles, de termes différents, ne peuvent être égales (**219**). Donc il ne peut y avoir de fraction dont le carré soit égal à $\frac{16}{27}$.

255. Il résulte, des deux théorèmes qui précèdent, qu'*il y a des nombres qui ne sont les carrés d'aucun nombre.*

Lorsqu'un nombre n'est pas un carré, on peut se proposer de *trouver un nombre dont le carré diffère aussi peu qu'on voudra du nombre donné :* c'est ce qu'on appelle calculer la racine carrée *approchée* de ce nombre.

256. Extraire, *à moins d'une unité,* la racine carrée d'un nombre, carré ou non carré, c'est trouver deux nombres entiers consécutifs, dont les carrés comprennent le nombre donné.

Extraire, *à moins d'un douzième, d'un centième,* etc., la racine carrée d'un nombre, carré ou non carré, c'est trouver deux nombres consécutifs de douzièmes, de centièmes, etc., dont les carrés comprennent le nombre donné.

257. Problème I. *Extraire, à moins d'une unité, la racine carrée d'un nombre entier.*

Soit proposé, par exemple, d'extraire, à moins d'une unité, la racine carrée du nombre entier 500.

Le nombre 500 a pour racine carrée entière 22; en d'autres termes, le nombre 500 est plus grand que le carré de 22, mais moindre que le carré de 23. Donc **22** est la racine carrée de 500, à moins d'une unité par défaut, et **23** est la racine carrée de 500, à moins d'une unité par excès.

On conclut de là la règle suivante :

Pour extraire, à moins d'une unité, la racine carrée d'un nombre entier, on extrait la racine carrée entière de ce nombre (**93**) : *cette racine carrée entière est la racine du nombre donné, à moins d'une unité par défaut, et cette même racine entière, augmentée d'une unité, est la racine carrée du nombre, à moins d'une unité par excès.*

258. Problème II. *Extraire, à moins d'une unité, la racine carrée d'un nombre fractionnaire.*

Soit proposé, par exemple, d'extraire, à moins d'une unité, la racine carrée du nombre fractionnaire $500\frac{7}{10}$.

Le nombre entier 500 a pour racine carrée entière le nombre 22; en d'autres termes, le nombre 500 est plus grand que le carré de 22, mais moindre que le carré de 23. Puisque le nombre entier 500 est plus grand que le carré de 22, il en est de même, à plus forte raison, du nombre fractionnaire $500\frac{7}{10}$, qui est plus grand que 500. D'autre part, le carré de 23 ne peut surpasser le nombre entier 500 de moins d'une unité : par conséquent, il surpasse aussi le nombre fractionnaire $500\frac{7}{10}$, qui est plus grand que 500 de moins d'une unité.

Il suit de là que le nombre fractionnaire $500\frac{7}{10}$ est compris, comme le nombre entier 500, entre les carrés des deux nombres entiers consécutifs 22 et 23. Dès lors, la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre fractionnaire $500\frac{7}{10}$, est la même que la racine carrée, à moins d'une unité, du nombre entier 500.

On conclut de là la règle suivante :

Pour extraire, à moins d'une unité, la racine carrée d'un nombre fractionnaire, il suffit d'extraire, à moins d'une unité, la racine carrée de l'entier contenu dans ce nombre (**257**).

259. Problème III. *Extraire, à moins d'une unité fractionnaire, la racine carrée d'un nombre quelconque.*

1° *Si l'approximation à obtenir n'est pas désignée, et qu'il s'agisse d'une fraction dont le dénominateur soit un carré, on extrait la racine carrée du numérateur, à moins d'une unité* (**257**), *puis celle du dénominateur.*

Ainsi la racine carrée de la fraction $\frac{27}{36}$ est $\frac{5}{6}$, à moins d'un sixième par défaut, et $\frac{6}{6}$ ou 1, à moins d'un sixième par excès.

2° *Si l'approximation à obtenir n'est pas désignée, et qu'il s'agisse d'une fraction dont le dénominateur ne soit pas un carré, on multiplie les deux termes de la fraction par un nombre convenable, de manière à rendre le dénominateur carré* (*) : *on est alors ramené au cas précédent.*

Ainsi la racine carrée de la fraction $\frac{16}{27}$ ou $\frac{48}{81}$ est $\frac{6}{9}$ ou $\frac{2}{3}$, à moins d'un neuvième par défaut, et $\frac{7}{9}$, à moins d'un neuvième par excès.

3° Mais supposons que l'approximation à obtenir soit désignée, et qu'il s'agisse, par exemple, d'extraire la racine carrée de la fraction $\frac{16}{27}$, *à moins d'un vingtième.*

Il s'agit de trouver deux nombres consécutifs de vingtièmes, entre les carrés desquels soit comprise la fraction $\frac{16}{27}$.

Soient x et $x + 1$ ces deux nombres de vingtièmes : les fractions $\frac{x^2}{20^2}$ et $\frac{(x+1)^2}{20^2}$ seront l'une plus petite, l'autre plus grande que la fraction $\frac{16}{27}$. On aura donc

$$\frac{x^2}{20^2} < \frac{16}{27} < \frac{(x+1)^2}{20^2}.$$

Multiplions chacune de ces trois fractions par 20^2; il viendra

$$x^2 < \frac{16}{27} \times 20^2 < (x+1)^2.$$

(*) Pour avoir *le plus petit dénominateur carré*, on décompose le dénominateur de la fraction donnée, supposée irréductible, en ses facteurs premiers, et on multiplie les deux termes de la fraction par chaque facteur premier du dénominateur dont l'exposant est impair (**193**).

Ainsi les deux nombres x^2 et $(x+1)^2$ sont l'un plus petit, l'autre plus grand que le nombre $\frac{16}{27} \times 20^2$: donc x et $x+1$ sont les racines carrées, à moins d'une unité par défaut et par excès, du nombre $\frac{16}{27} \times 20^2$.

Le produit $\frac{16}{27} \times 20^2$ est égal à $237\frac{1}{27}$, et la racine carrée de ce nombre, à moins d'une unité, est la même que celle du nombre 237 (**258**), savoir, **15**, à moins d'une unité par défaut, et **16**, à moins d'une unité par excès.

La racine carrée de la fraction $\frac{16}{27}$ est donc $\frac{15}{20}$ ou $\frac{3}{4}$, à moins d'un vingtième par défaut, et $\frac{16}{20}$ ou $\frac{4}{5}$, à moins d'un vingtième par excès.

On déduit de là la règle suivante :

Pour obtenir, à moins d'une unité fractionnaire donnée, la racine carrée d'un nombre quelconque, on multiplie ce nombre par le carré du dénominateur de l'approximation; on extrait ensuite, à moins d'une unité, la racine carrée de l'entier contenu dans ce produit (**257**), *et on donne pour dénominateur à cette racine le dénominateur de l'approximation.*

***260**. Comme nous l'avons dit, les théorèmes et les règles qui précèdent sont applicables à des puissances et à des racines de degré quelconque.

Pour extraire, par exemple, la racine cubique de la fraction $\frac{16}{27}$, *à moins d'un vingtième*, on multiplie cette fraction par 20^3, ce qui donne $\frac{16}{27} \times 20^3$, ou $4740\frac{20}{27}$. La racine cubique entière de 4740 étant **16**, on en conclut que la racine cubique de $\frac{16}{27}$ est $\frac{16}{20}$ ou $\frac{4}{5}$, à moins d'un vingtième par défaut, et $\frac{17}{20}$, à moins d'un vingtième par excès.

De même, pour extraire la racine sixième du nombre 12345679, *à moins d'un tiers*, on multiplie ce nombre par 3^6, ce qui donne 89999999181, dont la racine sixième entière est **66** (**110**) : on en conclut que la racine sixième de 12345679 est $\frac{66}{3}$ ou **22**, à moins d'un tiers par défaut, et $\frac{67}{3}$ ou $22\frac{1}{3}$, à moins d'un tiers par excès.

Mais il est plus simple, dans ce dernier exemple, d'extraire la racine carrée de 12345679, à moins d'un tiers par défaut, ce qui donne **11111**; puis la racine cubique de 11111, à moins d'un tiers par défaut, ce qui donne **22** : d'où l'on conclut encore, par un raisonnement qui a déjà été employé (**110**), que la racine sixième de 12345679 est **22**, à moins d'un tiers par défaut, et $22\frac{1}{3}$ à moins d'un tiers par excès.

CHAPITRE VIII

DES FRACTIONS EN GÉNÉRAL

261. On n'a considéré jusqu'ici que les fractions appelées *ordinaires*, lesquelles sont *à termes entiers* (**203**), et on a vu (**242**) que de telles fractions sont égales aux quotients de leurs numérateurs par leurs dénominateurs, en sorte que les notations $\frac{5}{7}$ et 5 : 7, par exemple, sont équivalentes.

Réciproquement, on est convenu de donner le nom générique de *fraction* au *quotient indiqué de la division de deux nombres quelconques*, et de regarder comme équivalentes, par exemple, les notations

$$2\frac{5}{7} : \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \frac{2\frac{5}{7}}{\frac{3}{4}}.$$

Pour justifier cette nouvelle définition, il est nécessaire de faire voir que les propositions et les règles de calcul, démontrées pour les fractions ordinaires, sont applicables aux fractions considérées de cette manière plus générale.

Propriétés générales des fractions.

262. *Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le numérateur d'une fraction par un nombre quelconque, la fraction est multipliée ou divisée par ce nombre.*

Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise le dénominateur d'une fraction par un nombre quelconque, la fraction est divisée ou multipliée par ce nombre.

Lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux termes d'une fraction par un même nombre, la fraction ne change pas de valeur.

Ces propositions générales sont vraies pour des fractions à termes quelconques (**246, 247, 248**), et elles coïncident avec les propositions particulières démontrées pour les fractions à termes entiers (**212, 213, 214**).

Il résulte de la dernière proposition qu'on peut simplifier une fraction par la suppression des facteurs communs à ses deux termes.

Il en résulte aussi que l'on peut étendre à des fractions quelconques les règles données pour la réduction des fractions ordinaires à un même dénominateur.

Opérations sur les fractions.

263. *Pour additionner des fractions de même dénominateur, on additionne les numérateurs et on donne à la somme pour dénominateur le dénominateur commun.*

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commence par les réduire à un commun dénominateur, et on applique la même règle.

Pour démontrer cette règle, identique à celle qui a été donnée pour les fractions à termes entiers (**228**), il suffit de considérer le cas où les fractions données ont le même dénominateur (**262**).

Soit, par exemple, à faire la somme

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{7}} + \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{7}}.$$

On a, par définition (**261**),

$$\frac{\frac{8}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{8}{3} : \frac{5}{7} = \frac{8}{3} \times \frac{7}{5}; \quad \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{7}} = \frac{4}{9} : \frac{5}{7} = \frac{4}{9} \times \frac{7}{5}.$$

Par suite, la somme cherchée est égale à

$$\frac{8}{3} \times \frac{7}{5} + \frac{4}{9} \times \frac{7}{5},$$

ou à

$$\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{9}\right) \times \frac{7}{5},$$

ou, encore, à

$$\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{9}\right) : \frac{5}{7},$$

ou, enfin, par définition (**261**), à

$$\frac{\frac{8}{3} + \frac{4}{9}}{\frac{5}{7}},$$

ce qui démontre la règle.

264. *Pour soustraire l'une de l'autre deux fractions de même dénominateur, on soustrait le numérateur de la seconde du numérateur de la première et on donne à la différence pour dénominateur le dénominateur commun.*

Si les fractions n'ont pas le même dénominateur, on commence par les réduire à un commun dénominateur, et on applique la même règle.

Cette règle, identique à celle qui a été donnée pour la soustraction des fractions à termes entiers (**229**), se démontre comme celle de l'addition (**263**).

265. *Pour multiplier deux ou plusieurs fractions, on les multiplie terme à terme.*

Pour démontrer cette règle, identique à celle qui a été donnée pour les fractions à termes entiers (**235** et **238**), il suffit de considérer le cas de deux facteurs.

Soit, par exemple, à faire le produit

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{9}} \times \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{11}}.$$

On a, par définition (**261**),

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{9}} = \frac{4}{5} : \frac{7}{9} = \frac{4}{5} \times \frac{9}{7}; \quad \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{11}} = \frac{3}{4} : \frac{2}{11} = \frac{3}{4} \times \frac{11}{2}.$$

Par suite, le produit cherché est égal à

$$\left(\frac{4}{5} \times \frac{9}{7}\right) \times \left(\frac{3}{4} \times \frac{11}{2}\right),$$

ou à

$$\frac{4 \times 3}{5 \times 4} \times \frac{9 \times 11}{7 \times 2},$$

ou à

$$\frac{4 \times 3}{5 \times 4} : \frac{7 \times 2}{9 \times 11},$$

ou, encore, à

$$\left(\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}\right) : \left(\frac{7}{9} \times \frac{2}{11}\right),$$

ou, enfin, par définition (**261**), à

$$\frac{\frac{4}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{7}{9} \times \frac{2}{11}},$$

ce qui démontre la règle.

266. *Un produit de nombres quelconques ne change pas, quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

Ce théorème est identique à celui qui a été donné pour les fractions à termes entiers (**239**), et se démontre de la même manière.

267. *Pour diviser un nombre quelconque par une fraction, on multiplie ce nombre par la fraction renversée.*

Cette règle est identique à celle qui a été donnée pour la division d'un nombre par une fraction à termes entiers (**244**).

En effet, diviser un nombre quelconque par une fraction, telle que

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{11}},$$

c'est, par définition (**261**), le diviser par

$$\frac{3}{4} : \frac{2}{11},$$

ou par

$$\frac{3}{4} \times \frac{11}{2},$$

ou, enfin, par

$$\frac{3 \times 11}{4 \times 2}.$$

Or ceci revient (**244**) à multiplier le nombre par

$$\frac{4 \times 2}{3 \times 11},$$

ou par

$$\frac{2}{11} \times \frac{4}{3},$$

ou par

$$\frac{2}{11} : \frac{3}{4},$$

ou, enfin, par définition (**261**), par

$$\frac{\frac{2}{11}}{\frac{3}{4}},$$

ce qui démontre la règle.

LIVRE QUATRIÈME

LES NOMBRES DÉCIMAUX

—

CHAPITRE I

DES NOMBRES DÉCIMAUX

268. On appelle, en général, *fraction ordinaire*, une fraction quelconque à termes entiers (**203** et **261**), et, plus spécialement, une fraction à termes entiers, dont le dénominateur n'est pas une puissance de 10.

On appelle *fraction décimale* une fraction à termes entiers, dont le dénominateur est 10, 100, 1000, ou, en général, une puissance quelconque de 10.

Une fraction décimale exprime donc un certain nombre de *dixièmes*, ou de *centièmes*, ou de *millièmes*, ou de *dix-millièmes*, ou de *cent-millièmes*, ou de *millionièmes*, ou de *dix-millionièmes*, ou de *cent-millionièmes*, ou de *billionièmes*, etc., de l'unité.

Les *dixièmes*, les *centièmes*, les *millièmes*, les *dix-millièmes*, etc., sont appelés respectivement *unités décimales du premier ordre, du deuxième ordre, du troisième ordre, du quatrième ordre*, etc.

Une unité décimale d'un ordre quelconque vaut dix unités décimales de l'ordre qui le suit.

On appelle *nombre décimal* celui qui est composé d'un nombre entier et d'une fraction décimale, comme $3\frac{7}{10}$.

Par extension, on appelle *nombre décimal* une fraction décimale quelconque, plus grande que l'unité, comme $\frac{625}{100}$, ou égale à l'unité, comme $\frac{100}{100}$, ou même plus petite que l'unité, comme $\frac{25}{100}$.

269. *Un nombre décimal quelconque peut être considéré comme composé d'une partie entière, laquelle peut être nulle, et d'une suite de fractions décimales d'ordres successifs, dont les numérateurs sont moindres que* 10.

Le nombre décimal $\frac{314\,159}{100\,000}$, par exemple, est égal à

$$\frac{300000}{100000} + \frac{10000}{100000} + \frac{4000}{100000} + \frac{100}{100000} + \frac{50}{100000} + \frac{9}{100000},$$

ou (**214**) à

$$3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{5}{10000} + \frac{9}{100000}.$$

270. Pour pouvoir écrire les nombres décimaux à la manière des nombres entiers, c'est-à-dire sans dénominateur, on a fait les conventions suivantes :

1° On place, à la droite du chiffre des unités, et vers le haut, un point, que l'on appelle le *point décimal*, et qui est destiné à séparer la partie entière du nombre de sa partie décimale;

2° On convient que *tout chiffre, placé à la droite d'un autre, représente des unités dix fois plus petites.* Ainsi le premier chiffre à droite des unités simples représente des dixièmes; le chiffre suivant représente des centièmes; le chiffre suivant, des millièmes, et ainsi de suite;

3° Si le nombre n'a pas de partie entière, on la remplace ou non par un zéro, et on remplace de même par des zéros les unités décimales des divers ordres qui peuvent manquer.

D'après ces conventions, les nombres décimaux $3\frac{14\,159}{100\,000}$, $\frac{807}{100}$, $\frac{16}{10\,000}$, décomposés comme il a été dit (**269**), s'écriront : 3·14159, 8·07, 0·0016 ou ·0016.

En général, *pour écrire, à la manière des nombres entiers, un nombre décimal écrit à la manière des fractions ordinaires, on écrit la partie entière, s'il y a lieu, puis le numérateur, en séparant, sur sa droite, par un point décimal, autant de chiffres qu'il y a de zéros au dénominateur.*

Chacun des chiffres écrits à la droite du point décimal s'appelle *chiffre décimal*, ou, simplement, *décimale.*

Réciproquement, les nombres décimaux 1·827, 0·09 peuvent s'écrire : $\frac{1827}{1000}$, $\frac{9}{100}$.

En général, *pour écrire, à la manière des fractions ordinaires, un nombre décimal écrit à la manière des nombres entiers, on supprime le point décimal, ce qui donne le numérateur, et on prend pour dénominateur l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de décimales dans le nombre proposé.*

271. Un nombre décimal, écrit sous forme de nombre entier, peut s'énoncer de plusieurs manières :

1° *On énonce d'abord la partie entière, s'il y a lieu, puis la partie décimale, comme si elle représentait un nombre entier, et on ajoute le nom des unités exprimées par la dernière décimale.*

Ainsi le nombre décimal 7·0432 s'énonce : 7 *unités* 432 *dix-millièmes*;

2° *Lorsqu'il y a une partie entière, et que le nombre proposé n'a pas beaucoup de chiffres, on peut faire abstraction du point décimal, et lire le nombre entier ainsi obtenu, en ajoutant le nom des unités exprimées par la dernière décimale.*

Ainsi le nombre 2·56 peut s'énoncer : 256 *centièmes*;

3° Enfin, *lorsqu'un nombre renferme beaucoup de chiffres à sa partie décimale, on peut décomposer celle-ci en tranches de trois chiffres, en allant de gauche à droite, à partir du point décimal : on énonce alors la partie entière, s'il y a lieu, puis successivement chaque tranche décimale, en donnant à chacune le nom des unités qu'exprime son dernier chiffre.*

Ainsi le nombre décimal 3·141592653589 peut s'énoncer : 3 *unités* 141 *millièmes* 592 *millionièmes* 653 *billionièmes* 589 *trillionièmes*.

272. Réciproquement, la manière d'écrire un nombre décimal varie avec la manière de l'énoncer :

1° *Lorsqu'on énonce séparément la partie entière et la partie decimale, on écrit d'abord la partie entière, et on la fait suivre du point décimal; puis on écrit la partie décimale comme si c'était un nombre entier, et on fait en sorte que son premier chiffre à droite exprime des unités décimales de l'ordre énoncé : à cet effet, on intercale, s'il est nécessaire, un ou plusieurs zéros entre le point décimal et le premier chiffre décimal significatif.*

Ainsi le nombre décimal 5 *unités* 89 *millionièmes* s'écrira 5·000089;

2° *Lorsqu'il n'y a pas de partie entière, ou lorsqu'on la confond, dans*

l'énoncé, avec la partie décimale, on écrit le nombre décimal comme si c'était un nombre entier; puis on place le point décimal de manière que le premier chiffre à droite exprime des unités décimales de l'ordre énoncé.

Ainsi le nombre décimal 30075 *millièmes* s'écrira 30·075;

3° Enfin, *lorsque la partie décimale du nombre est énoncée par classes de trois ordres, on écrit, à la suite du point décimal, les centaines, les dizaines et les unités de chaque classe, en remplaçant par des zéros les ordres qui peuvent manquer.*

Ainsi le nombre décimal 318 *millièmes* 309 *millionièmes* 886 *billionièmes* 183 *trillionièmes* s'écrira 0·318309886183.

273. Théorème I. *Un nombre décimal ne change pas, lorsqu'on écrit ou qu'on supprime un ou plusieurs zéros à sa droite.*

Ainsi les nombres décimaux **3·75** et **3·750** ont la même valeur.

En effet, le premier nombre peut être lu ainsi : 3 *unités* 7 *dixièmes* 5 *centièmes*, et le second : 3 *unités* 7 *dixièmes* 5 *centièmes* 0 *millième* : donc les deux nombres ont la même valeur.

De même, le nombre entier **14** peut s'écrire **14·0**, **14·00**, etc.

274. Théorème II. *On multiplie ou on divise un nombre décimal par* 10, 100, 1000,... *en déplaçant le point décimal de* 1, 2, 3... *rangs vers la droite ou vers la gauche.*

On a, par exemple,

$0{\cdot}375 \times 10 = \mathbf{3{\cdot}75}$, $0{\cdot}375 \times 100 = \mathbf{37{\cdot}5}$, $0{\cdot}375 \times 1000 = \mathbf{375}$, etc.

En effet, en déplaçant le point décimal de 1, 2, 3... rangs vers la droite, on fait exprimer à chaque chiffre du nombre 0·375 des unités 10, 100, 1000... fois plus grandes. Chaque partie du nombre 0·375 devient donc 10, 100, 1000... fois plus grande, et, par suite, le nombre lui-même devient 10, 100, 1000... fois plus grand.

On démontrerait, de même, que l'on a, par exemple,

$3{\cdot}6 : 10 = \mathbf{0{\cdot}36}$, $3{\cdot}6 : 100 = \mathbf{0{\cdot}036}$, $3{\cdot}6 : 1000 = \mathbf{0{\cdot}0036}$, etc.,

et aussi, avec un dividende entier,

$25 : 10 = \mathbf{2{\cdot}5}$, $25 : 100 = \mathbf{0{\cdot}25}$, $25 : 1000 = \mathbf{0{\cdot}025}$, etc.

275. Problème. *Exprimer, à moins d'une unité ou d'une demi-unité d'un ordre décimal donné, la valeur d'un nombre décimal.*

Soit proposé, par exemple, d'exprimer, à moins d'un dixième ou d'un demi-dixième, la valeur du nombre décimal **0·32859**.

Si l'on observe que *la fraction* 0·02859, *formée par les chiffres qui suivent les dixièmes, est moindre qu'un dixième,* on en conclura que la valeur du nombre proposé est **0·3**, à moins d'un dixième par défaut, et **0·4**, à moins d'un dixième par excès.

Si l'on observe que la même fraction 0·02859 est moindre que 5 centièmes, ou qu'un demi-dixième, on en conclura que la valeur du nombre proposé est **0·3**, à moins d'un demi-dixième par défaut.

On verrait, de même, que la valeur du nombre donné est **0·32** ou **0·33**, à moins d'un centième par défaut ou par excès, et **0·33**, à moins d'un demi-centième par excès, et ainsi de suite.

On conclut de là la règle suivante :

Pour avoir, à une unité près d'un ordre décimal donné, la valeur d'un nombre décimal, il suffit de supprimer les chiffres écrits à la droite de celui qui exprime les unités de cet ordre décimal.

Si, lorsque le premier chiffre supprimé est 5 *ou supérieur à* 5, *on* force *le dernier chiffre conservé, en l'augmentant d'une unité, on a la valeur du nombre à une demi-unité près de l'ordre de ce dernier chiffre.*

CHAPITRE II

OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES DÉCIMAUX

276. Les opérations sur les nombres décimaux se définissent de la même manière que les opérations sur les fractions en général (**227**).

Addition.

277. *Pour faire la somme de plusieurs nombres décimaux, on écrit ces nombres les uns au-dessous des autres, de manière que les unités de*

même ordre se correspondent. On opère ensuite l'addition par colonnes successives en commençant par la droite, ainsi que l'on fait pour les nombres entiers; et on place le point décimal au résultat sur la même ligne verticale que dans les nombres proposés.

Soit, par exemple, à faire l'addition des nombres 3269·21, 1157·36, 6730·79, 8842·64, ou 3·278, 5·06, 10·007, 0·0225. On aura

3269·21	3·278
1157·36	5·06
6730·79	10·007
8842·64	0·0225
20000	**18·3675**

Soustraction.

278. *Pour trouver la différence de deux nombres décimaux, on écrit le plus petit sous le plus grand, de manière que les unités de même ordre se correspondent; on fait ensuite la soustraction comme s'il s'agissait de nombres entiers, et on place au reste le point décimal sur la même ligne verticale que dans les nombres proposés.*

Si l'un des nombres a moins de décimales que l'autre, on suppose qu'il y ait des zéros à la place des unités qui manquent.

Soit proposé, par exemple, de soustraire 3·944 de 10·237, ou 0·625 de 1·5, ou 0·0005 de 1. On aura

10·237	1·5	1
3·944	0·625	0·0005
6·293	**0·875**	**0·9995**

Multiplication.

279. Soit proposé de multiplier 4·8 par 0·36, ou 128 par 0·375, ou 0·3125 par 256.

Multiplier 4·8 *par* 0·36, *c'est prendre les* 0·36 *de* 4·8, c'est-à-dire diviser 4·8 par 100, et multiplier le quotient obtenu par 36 (**231**).

Pour diviser 4·8 par 100, il suffit de déplacer le point décimal de deux rangs vers la gauche, ce qui donne 0·048 (**274**) : *ce nombre* 0·048 *a autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs* 4·8 *et* 0·36.

Pour multiplier 0·048 par 36, on observe que 36 fois 48 unités font 1728 unités : donc 36 fois 48 millièmes font 1728 millièmes, ou **1·728** : *ce produit* 1·728 *a autant de chiffres décimaux que le nombre* 0·048.

Donc, pour multiplier 4·8 par 0·36, il suffit de multiplier 48 par 36, et de séparer, sur la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les facteurs 4·8 et 0·36.

On aurait, de même, 128 × 0·375 = **48**, et 0·3125 × 256 = **80**.

4·8	1 2 8	0·3 1 2 5
0·3 6	0·3 7 5	2 5 6
2 8 8	6 4 0	1 8 7 5 0
1 4 4	8 9 6	1 5 6 2 5
1·7 2 8	3 8 4	6 2 5 0
	4 8·0 0 0	**8 0·0 0 0 0**

On peut dire encore :

Si l'on multiplie 48 par 36, on trouve 1728 pour produit. Mais, en remplaçant, dans le produit 4·8 × 0·36, le facteur 4·8 par 48, on multiplie ce facteur, et, par suite, le produit lui-même, par 10 (**240**, 5°) ; de même, en remplaçant le facteur 0·36 par 36, on multiplie ce facteur, et, par suite, le produit lui-même, par 100. Le produit 1728 des deux nombres 48 et 36 est donc 10 × 100 ou 1000 fois plus grand que le produit 4·8 × 0·36. Par conséquent, ce dernier produit est égal à 1728 : 1000, ou (**274**) à **1·728**.

Enfin, on peut écrire les deux nombres sous forme de fractions ordinaires (**270**), ce qui donne (**234**) :

$$4{\cdot}8 \times 0{\cdot}36 = \frac{48}{10} \times \frac{36}{100} = \frac{48 \times 36}{10 \times 100} = \frac{1728}{1000} = \mathbf{1{\cdot}728}.$$

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour faire le produit de deux nombres décimaux, on les multiplie comme s'ils étaient entiers, et on sépare, sur la droite du produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.

Division.

280. Soit d'abord proposé de ramener la division de deux nombres décimaux à celle de deux nombres entiers.

4·92 : 0·23		49·2 : 0·023		4·92 : 2·3	
492	23	49 200	23	492	230
46	**21**	46	**2139**	460	**2**
32		32		32	
23		23			
9		90			
		69			
		210			
		207			
		3			

Supposons, en premier lieu, *qu'il y ait le même nombre de décimales au dividende et au diviseur.*

Soit, par exemple, à diviser 4·92 par 0·23.

Si l'on multiplie les deux nombres par 100, le quotient ne sera pas changé (**248**), et on sera ramené à diviser 492 par 23.

Le quotient entier de ces deux nombres est 21, et le quotient complet (**243**) est $\mathbf{21\frac{9}{23}}$.

Supposons, en second lieu, *qu'il y ait plus de décimales au diviseur qu'au dividende.* Ce cas comprend celui où le dividende serait entier.

Soit, par exemple, à diviser 49·2 par 0·023.

Si l'on écrit deux zéros à la droite du dividende, on aura à diviser 49·200 par 0·023, ou, d'après le premier cas, 49200 par 23.

Le quotient entier de ces deux nombres est 2139, et le quotient complet est $\mathbf{2139\frac{3}{23}}$.

Supposons, en troisième lieu, *qu'il y ait plus de décimales au dividende qu'au diviseur.* Ce cas comprend celui où le diviseur serait entier.

Soit, par exemple, à diviser 4·92 par 2·3.

Si l'on écrit un zéro à la droite du diviseur, on aura à diviser 4·92 par 2·30, ou, d'après le premier cas, 492 par 230.

Le quotient entier de ces deux nombres est 2, et le quotient complet est $2\frac{16}{115}$.

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour trouver le quotient de deux nombres décimaux, on fait en sorte que ces deux nombres aient le même nombre de décimales, en écrivant, s'il y a lieu, des zéros à la droite de celui qui en a le moins; puis on fait la division des deux nombres comme s'ils étaient entiers.

On arrive à la même règle en écrivant le dividende et le diviseur sous forme de fractions ordinaires, ce qui donne (**244**) :

$$4{\cdot}92 : 0{\cdot}23 = \frac{492}{100} : \frac{23}{100} = \frac{492 \times 100}{100 \times 23} = \frac{492}{23} = \mathbf{21}\frac{9}{23};$$

$$49{\cdot}2 : 0{\cdot}023 = \frac{492}{10} : \frac{23}{1000} = \frac{492 \times 1000}{10 \times 23} = \frac{49200}{23} = \mathbf{2139}\frac{3}{23};$$

$$4{\cdot}92 : 2{\cdot}3 = \frac{492}{100} : \frac{23}{10} = \frac{492 \times 10}{100 \times 23} = \frac{492}{230} = \mathbf{2}\frac{16}{115}.$$

281. Soit maintenant proposé de trouver, *avec un certain nombre de décimales*, ou *à moins d'un dixième, d'un centième, d'un millième*, etc., le quotient de deux nombres entiers ou décimaux, c'est-à-dire de *trouver deux nombres consécutifs de dixièmes, de centièmes, de millièmes*, etc., *dont les produits par le diviseur comprennent le dividende.*

Supposons d'abord le diviseur entier, et soit, par exemple, à trouver, *avec trois décimales*, ou *à moins d'un millième*, le quotient de 49·2 par 23.

Écrivons, à la droite du dividende, assez de zéros pour qu'il ait trois décimales : on aura à diviser 49·200 par 23. Divisons ces deux nombres comme s'ils étaient entiers, et, sur la droite du quotient entier 2139, séparons trois chiffres décimaux : je dis que le nombre **2·139** ainsi formé sera le quotient demandé, à moins d'un millième par défaut, et le nombre **2·140** le quotient à moins d'un millième par excès.

En effet, le quotient entier de 49200 par 23 étant 2139, il s'ensuit que 49200 unités valent plus de 23 fois 2139 unités et moins de 23 fois 2140 unités, et que, de même, 49200 millièmes valent plus de 23 fois 2139 millièmes et moins de 23 fois 2140 millièmes. Par conséquent, le quotient de 49200 millièmes ou 49·2 par 23 est 2139 millièmes ou **2·139**, à moins d'un millième par défaut, et 2140 millièmes ou **2·140**, à moins d'un millième par excès.

Si le diviseur est décimal, on avance, au dividende et au diviseur, le point décimal d'autant de rangs vers la droite qu'il est nécessaire pour rendre le diviseur entier (**248**), et on est ramené au cas précédent

On trouve, par exemple, que le quotient de 4·92 par 0·023, ou de 4920 par 23, est **213·913**, à moins d'un millième par défaut, et **213·914**, à moins d'un millième par excès.

On voit que la méthode revient, dans tous les cas, à *donner autant de décimales de plus au dividende qu'au diviseur que l'on désire avoir de décimales au quotient.*

282. Toutefois, dans la pratique, il est plus simple d'opérer de la manière suivante :

Lorsque le dividende et le diviseur ont le même nombre de décimales, on fait la division comme s'ils étaient entiers, et on place le point décimal à la droite du quotient. On continue ensuite la division en écrivant un zéro à la droite du reste, puis à la droite du reste suivant, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait au quotient le nombre de décimales que l'on désire.

Lorsque le dividende a moins de décimales que le diviseur, on écrit, à la droite du dividende, assez de zéros pour qu'il ait autant de décimales que le diviseur, et on opère comme dans le cas précédent.

Enfin, lorsque le dividende a plus de décimales que le diviseur, on fait encore la division comme s'ils étaient entiers, et on sépare, sur la droite du quotient, autant de décimales qu'il y en a de plus au dividende qu'au diviseur. On continue ensuite la division comme il a été dit dans le premier cas.

Il est évident que le quotient, formé d'après cette règle, comporte une erreur, par défaut, moindre qu'une unité de l'ordre du dernier chiffre.

Lorsque le reste, considéré comme entier, est plus grand que la moitié du diviseur, considéré comme entier, on *force* le dernier chiffre du quotient : l'erreur est alors moindre qu'une demi-unité de l'ordre de ce dernier chiffre (**275**).

Enfin, il est utile d'observer que le reste représente des unités de même ordre que le dernier chiffre décimal du dividende donné, suivi des zéros que l'on a écrits à la droite des restes successifs.

Élévation aux puissances.

283. Soit proposé de former la quatrième puissance du nombre 0·312.

La quatrième puissance de 0·312 n'est autre chose que le produit 0·312 × 0·312 × 0·312 × 0·312 (**251**). Il suffit donc, d'après la règle donnée pour la multiplication des nombres décimaux (**279**), d'effectuer le produit 312 × 312 × 312 × 312, ou, en d'autres termes, de former la quatrième puissance de 312, et de séparer, sur la droite du résultat, douze chiffres décimaux, c'est-à-dire quatre fois autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le nombre 0·312. On trouve ainsi **0·009 475 854 336** pour la quatrième puissance demandée.

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour former la puissance deuxième, troisième, quatrième... d'un nombre décimal, on fait la puissance deuxième, troisième, quatrième... de ce nombre, abstraction faite du point décimal, et on sépare, sur la droite du résultat, 2, 3, 4... *fois autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans le nombre donné.*

Extraction des racines.

284. Soit proposé d'extraire, avec deux décimales, ou à moins d'un centième, la racine carrée du nombre 48·7.

On écrit, à la droite de ce nombre, assez de zéros pour qu'il ait un nombre de chiffres décimaux double du nombre de ceux qu'on veut avoir à la racine : on est ainsi ramené à extraire la racine carrée du nombre 48·7000.

On extrait, à moins d'une unité (**257**), la racine carrée de ce nombre, considéré comme entier, et, sur la droite de cette racine, on sépare deux chiffres décimaux : le nombre ainsi obtenu est la racine carrée demandée.

48·70.00	**6·97**		48·700.000	**3·65**		
36	129	1387	27	2700	2700	388800
127.0	9	7	217.00	540	1080	5400
1161	1161	9709	19656	36	108	25
1090·0			20440.00	3276	3888	394225
9709			1971125	6		5
1191			72875	19656		1971125

En effet, soit 697 la racine carrée entière du nombre 487 000. Le nombre 487 000 étant compris entre 697^2 et 698^2, le nombre 487 000 : 10 000 ou 48·7 sera compris entre 697^2 : 10 000 et 698^2 : 10 000, ou entre $6{\cdot}97^2$ et $6{\cdot}98^2$. Par conséquent, la racine carrée de 48·7, à moins d'un centième par défaut, ou avec deux décimales exactes, est **6·97**, et la racine carrée, à moins d'un centième par excès, est **6·98** (**259**).

On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour trouver, avec 1, 2, 3, 4... *chiffres décimaux, la racine carrée d'un nombre entier ou décimal, on écrit, à la droite de ce nombre, assez de zeros pour qu'il ait* 2, 4, 6, 8... *chiffres décimaux. On extrait ensuite, à moins d'une unité, la racine carrée du nombre ainsi écrit, considéré comme entier, et on sépare, sur la droite de cette racine,* 1, 2, 3, 4... *chiffres décimaux : le nombre ainsi obtenu est la racine carrée demandée.*

285. Il est facile d'étendre la règle qui précède à l'extraction d'une racine de degré quelconque d'un nombre entier ou décimal.

Pour extraire, par exemple, avec deux décimales, la racine cubique du nombre 48·7, on écrit ce nombre avec six chiffres décimaux, ce qui donne 48·700 000 ; on extrait, à moins d'une unité, la racine cubique du nombre ainsi écrit, considéré comme entier, ce qui donne 365 ou 366 ; enfin, sur la droite de cette racine, on sépare deux chiffres décimaux : on obtient ainsi **3·65** ou **3·66** pour la racine cubique demandée.

CHAPITRE III

EXTRACTION ABRÉGÉE DE LA RACINE CARRÉE

***286.** Lorsque la racine carrée d'un nombre entier ou décimal doit avoir un grand nombre de figures, on peut déterminer cette racine par une méthode abrégée, que nous allons exposer dans ce chapitre (*).

***287.** THÉORÈME I. *On trouve exactement les dizaines, ou les centaines, ou les mille... de la racine carrée entière d'un nombre, en extrayant la racine carrée entière des centaines, ou des dizaines de mille, ou des millions... de ce nombre.*

Soit, par exemple, le nombre 123 456 789. La racine carrée entière du nombre des millions 123 étant 11, je dis que 11 est le nombre des mille de la racine carrée entière du nombre 123 456 789.

En effet, la racine carrée entière de 123 étant supposée égale à 11, on a

$$11^2 < 123 < 12^2.$$

La première inégalité n'exclut pas l'égalité, car le nombre des millions pourrait être un carré parfait; mais les deux derniers nombres diffèrent d'*au moins une unité.*

De ces inégalités on déduit, en multipliant chaque nombre par 1 000 000,

$$11^2 . 1\,000\,000 < 123\,000\,000 < 12^2 . 1\,000\,000.$$

Les deux derniers nombres diffèrent maintenant d'*au moins un million.* Si donc on ajoute au nombre 123 000 000 le nombre 456 789, qui est moindre qu'un million, la seconde inégalité subsistera encore, et à plus forte raison la première. On aura ainsi

$$11^2 . 1\,000\,000 < 123\,456\,789 < 12^2 . 1\,000\,000,$$

ou

$$11\,000^2 < 123\,456\,789 < 12\,000^2.$$

(*) *Journal de Mathématiques élémentaires* de BOURGET, tome I, page 194.

Le nombre 123 456 789 est donc plus grand que le carré de 11 mille, mais moindre que le carré de 12 mille : donc **11** est le nombre des mille de la racine carrée de ce nombre.

Quand on a obtenu les dizaines, ou les centaines, ou les mille... de la racine, on en fait le carré, et on retranche ce carré du nombre proposé : nous appelons *reste* le résultat de cette soustraction.

Dans l'exemple considéré, le reste est **2 456 789**. Nous le désignerons, pour abréger, par la lettre R.

***288.** Théorème II. *Si l'on divise le reste par le double des dizaines, ou des centaines, ou des mille... de la racine, le quotient entier est une limite supérieure du nombre des unités de la racine.*

En effet, le reste R contient le double produit des 11 mille de la racine par les unités, plus le carré des unités, plus le reste final de l'opération, s'il y en a un. Si donc on divise R par le double des mille de la racine, ou par 22 000, le quotient entier sera une *limite supérieure* du nombre des unités de la racine.

On sait d'ailleurs que, pour diviser R ou 2 456 789 par 22 000, il suffit (**73**) de diviser 2456 par 22, ce qui donne le quotient entier **111**, et d'écrire, à la droite du reste 14, les chiffres supprimés à la droite du dividende, ce qui donne le reste **14 789**.

***289.** Théorème III. *Pour vérifier si la limite supérieure des unités de la racine n'est pas trop forte, on fait le carré de ce nombre : si ce carré peut être soustrait du reste de la division qui a donné la limite supérieure, cette limite est le nombre exact des unités de la racine, et le résultat de la soustraction est le reste final de l'opération.*

En effet, le reste R contient le double produit des 11 mille de la racine par les unités, le carré des unités et le reste final de l'opération. Si le quotient entier **111** de la division de ce reste par le double des mille, ou par 22 000, est le nombre exact des unités de la racine, le reste de cette division contiendra encore le carré des unités et le reste final de l'opération. Le carré du quotient doit donc pouvoir se retrancher du reste de la division.

Le carré du quotient 111 est 12 321, nombre moindre que le reste

14789 : donc **11111** est la racine carrée entière du nombre 123456789, et le reste de l'opération est 14789 moins 12321 ou **2468**.

Lorsque le carré du quotient surpasse le reste de la division, on peut ajouter à ce reste 1, 2, 3... fois le diviseur, et retrancher du quotient respectivement 1, 2, 3... unités, jusqu'à ce qu'on ait un nombre dont le carré puisse être soustrait du reste correspondant : ce nombre sera celui des unités de la racine, et le résultat de la soustraction sera le reste final de l'opération.

***290.** Lemme. *Si l'on divise le reste par le double plus un des dizaines, ou des centaines, ou des mille... de la racine, le quotient entier est inférieur à* 10, *ou à* 100, *ou à* 1000...

Dans l'exemple considéré, le quotient de la division du reste R par le double plus un des mille de la racine, ou par 23000, est inférieur à 1000.

On a, en effet, d'après le premier théorème,

$$123\,456\,789 < 12\,000^2.$$

Or

$$\begin{aligned} 12\,000^2 &= (11 + 1)^2.1\,000\,000 \\ &= (121 + 22 + 1).1\,000\,000 = 121\,000\,000 + 23\,000\,000. \end{aligned}$$

Donc

$$123\,456\,789 < 121\,000\,000 + 23\,000\,000.$$

On tire, de là,

$$123\,456\,789 - 121\,000\,000 < 23\,000\,000, \quad \text{ou} \quad R < 23\,000\,000,$$

d'où, enfin,

$$\frac{R}{23\,000} < 1000.$$

***291.** Théorème IV. *Si l'on divise le reste par le double plus un des dizaines, ou des centaines, ou des mille... de la racine, le quotient entier est une limite inférieure du nombre des unités de la racine.*

En effet, soit q le quotient entier de la division du reste R par 23000 : on aura

$$R > 23\,000.q,$$

et, par suite,

$$123\,456\,789 > 121\,000\,000 + 22\,000.q + 1000.q.$$

Remplaçons, dans le dernier terme du second membre, le nombre 1000 par le quotient q, qui, d'après le lemme précédent, est inférieur à 1000 : l'inégalité subsistera à plus forte raison, et on aura

$$123\,456\,789 > 11\,000^2 + 22\,000.q + q^2,$$

ou

$$123\,456\,789 > (11\,000 + q)^2.$$

Donc q est une *limite inférieure* du nombre des unités de la racine.

***292.** Théorème V. *Les deux limites supérieure et inférieure diffèrent au plus d'une unité, lorsque le nombre des dizaines de la racine est au moins* 5, *ou le nombre des centaines au moins* 50, *ou le nombre des mille au moins* 500...

Raisonnons toujours dans le cas où la racine est partagée en mille et unités, et désignons par a le nombre des mille de cette racine.

La partie entière du quotient

$$\frac{R}{2a.1000}$$

est la limite supérieure, et la partie entière du quotient

$$\frac{R}{(2a+1).\,1000}$$

est la limite inférieure du nombre des unités de la racine. Or la différence de ces deux fractions est

$$\frac{R}{2a.\,(2a+1).\,1000}, \quad \text{ou} \quad \frac{R}{(2a+1).\,1000} : 2a,$$

c'est-à-dire le quotient d'un nombre que nous avons démontré être inférieur à 1000 (**290**), par un nombre qui, par hypothèse, est au moins égal à 1000 : donc cette différence est inférieure à 1, et, par suite, les deux limites diffèrent au plus d'une unité.

***293.** On déduit, des théorèmes qui précèdent, la règle suivante :

Pour extraire la racine carrée d'un nombre, dans le cas où cette racine doit avoir un grand nombre de figures, on détermine, par la méthode ordinaire,

plus de la moitié des chiffres de cette racine, ou même seulement la moitié, si le nombre total des chiffres est pair, et que le premier soit au moins égal à 5; on obtient ensuite tous les autres en divisant le dernier reste, suivi des tranches non employées, par le double de la racine déjà trouvée, suivi d'autant de zéros qu'il reste de chiffres à obtenir : seulement le dernier chiffre à droite de la racine peut être trop fort d'une unité.

En effet, d'après le deuxième théorème, le quotient entier de cette division est une limite supérieure du nombre formé par les chiffres encore inconnus de la racine, et, d'après le cinquième théorème, cette limite peut être trop forte au plus d'une unité.

***294**. Soit proposé, par exemple, d'extraire la racine carrée entière du nombre 7 213 895 957 568 729.

La racine carrée de ce nombre devant avoir huit chiffres, dont le premier sera 8, on détermine, par la méthode ordinaire, les quatre premiers chiffres de cette racine : on trouve **8493**, et le reste est 7910.

Pour avoir les quatre autres chiffres, on divise ce reste, suivi des tranches non employées, par le double de la racine trouvée, suivi de quatre zéros, ou 791 057 568 729 par 169 860 000 : le quotient entier est **4657** et le reste 19 548 729 (**73**). Le carré 21 687 649 de ce quotient étant plus grand que le reste 19 548 729, la limite 4657 est trop forte, et, comme elle ne peut être trop forte que d'une unité, on en conclut que la racine carrée entière du nombre proposé est **84 934 656**.

Pour avoir le reste final de l'opération, on ajoute au reste 19 548 729 le diviseur 169 860 000, et de la somme on retranche le carré de 4656.

On obtient rapidement le carré de 4656 *en retranchant du carré de* 4657, *précédemment formé, le double moins un de ce nombre.* On a, en effet,

$$4656^2 = (4657 - 1)^2 = 4657^2 - 2 \text{ fois } 4657 + 1.$$

***295**. Soit encore proposé d'extraire, à un grand nombre de figures, la racine carrée de 17.

On détermine, par la méthode ordinaire, les trois premiers chiffres de cette racine : on trouve **4·12**; le reste, abstraction faite du point décimal, est 256.

Pour avoir les deux chiffres suivants de la racine, on divise le reste, suivi de quatre zéros, par le double de la racine, suivi de deux zéros, ou 2560000 par 82400 : le quotient entier est **31** et le reste 5600. Le carré 961 de ce quotient pouvant se retrancher du reste 5600, la racine carrée de 17, à cinq figures exactes, est **4·1231**, et le reste est 4639.

Pour avoir les quatre chiffres suivants de la racine, on divise le reste, suivi de huit zéros, par le double de la racine, suivi de quatre zéros, ou 463900000000 par 824620000 : le quotient entier est **0562** et le reste 463560000. Le carré 315844 de ce quotient pouvant se retrancher du reste 463560000, la racine carrée de 17, à neuf figures exactes, est **4·12310562**, et le reste est 463244156.

Pour avoir les huit chiffres suivants de la racine, on divise le reste, suivi de seize zéros, par le double de la racine, suivi de huit zéros, ou 4632441 560000000000000000 par 824621124000000000 : le quotient entier est **56176605** et le reste 44239598000000000. Le carré 3155810949326025 de ce quotient pouvant se retrancher du reste 44239598000000000, la racine carrée de 17, à dix-sept figures exactes, est **4·12310562561766 05**, et le reste est 41083787050673975.

Pour avoir les seize chiffres suivants de la racine, on diviserait le reste, suivi de trente-deux zéros, par le double de la racine, suivi de seize zéros, ou 41083787050673975.10^{32} par 824621125123532 10.10^{16}.

Et ainsi de suite.

CHAPITRE IV

EXTRACTION ABRÉGÉE DE LA RACINE CUBIQUE

***296.** Lorsque la racine cubique d'un nombre entier ou décimal doit avoir un grand nombre de figures, on peut déterminer cette racine par une méthode abrégée, que nous allons exposer dans ce chapitre.

***297.** Théorème I. *On trouve exactement les dizaines, ou les centaines, ou les mille... de la racine cubique entière d'un nombre, en extrayant la racine cubique entière des mille, ou des millions, ou des billions... de ce nombre.*

Soit, par exemple, le nombre 654321987. La racine cubique entière du nombre des millions 654 étant **8**, je dis que 8 est le nombre des centaines de la racine cubique entière du nombre 654321987.

En effet, la racine cubique entière de 654 étant supposée égale à 8, on a

$$8^3 < 654 < 9^3.$$

La première inégalité n'exclut pas l'égalité, car le nombre des millions pourrait être un cube parfait; mais les deux derniers nombres diffèrent d'*au moins une unité.*

De ces inégalités on déduit, en multipliant chaque nombre par 1000000,

$$8^3 . 1000000 < 654000000 < 9^3 . 1000000.$$

Les deux derniers nombres diffèrent maintenant d'*au moins un million.* Si donc on ajoute au nombre 654000000 le nombre 321987, qui est moindre qu'un million, la seconde inégalité subsistera encore, et à plu forte raison la première. On aura ainsi

$$8^3 . 1000000 < 654321987 < 9^3 . 1000000,$$

ou

$$800^3 < 654321987 < 900^3.$$

Le nombre 654321987 est donc plus grand que le cube de 8 centaines, mais moindre que le cube de 9 centaines : donc **8** est le nombre des centaines de la racine cubique entière de ce nombre.

Quand on a obtenu les dizaines, ou les centaines, ou les mille... de la racine, on en fait le cube, et on retranche ce cube du nombre proposé : nous appelons *reste* le résultat de cette soustraction.

Dans l'exemple considéré, le reste est **142321987**. Nous le désignerons, pour abréger, par la lettre R.

***298.** Théorème II. *Si l'on divise le reste par le triple carré des dizaines, ou des centaines, ou des mille... de la racine, le quotient entier sera une limite supérieure du nombre des unités de la racine.*

En effet, le reste R contient le triple produit du carré des 8 centaines de la racine par les unités, plus le triple produit des 8 centaines par le

carré des unités, plus le cube des unités, plus le reste final de l'opération, s'il y en a un. Si donc on divise R par le triple carré des centaines de la racine, ou par 1920000, le quotient entier sera une *limite supérieure* du nombre des unités de la racine.

On sait d'ailleurs que, pour diviser 142321987 par 1920000, il suffit (**73**) de diviser 14232 par 192, ce qui donne le quotient entier **74**, et d'écrire, à la droite du reste 24, les chiffres supprimés à la droite du dividende, ce qui donne le reste **241987**.

***299.** Théorème III. *Pour vérifier si la limite supérieure des unités de la racine n'est pas trop forte, on fait le carré de ce nombre, et on multiplie ce carré par le même nombre augmenté du triple des dizaines, ou des centaines, ou des mille... de la racine : si le produit peut être soustrait du reste de la division qui a donné la limite supérieure, cette limite est le nombre exact des unités de la racine, et le résultat de la soustraction est le reste final de l'opération.*

En effet, le reste R contient le triple produit du carré des 8 centaines de la racine par les unités, plus le triple produit de ces 8 centaines par le carré des unités, plus le cube des unités, plus le reste final de l'opération. Si le quotient entier **74** de la division de ce reste par le triple carré des centaines, ou par 1920000, est le nombre exact des unités de la racine, le reste 241987 de cette division contiendra encore le triple produit de 8 centaines par le carré de 74 unités, plus le cube de 74 unités, plus le reste final de l'opération; ou, si l'on veut, le produit du carré de 74 unités par le nombre 2474, formé de 74 unités et du triple des 8 centaines, plus le reste final de l'opération. Le produit $74^2 \times 2474$ doit donc pouvoir se retrancher du reste 241987 de la division.

On trouve que le produit $74^2 \times 2474$ ou 13547624 est supérieur au reste 241987 : donc la limite 74 est trop forte.

***300.** Lemme. *Si l'on divise le reste par le triple carré plus le triple plus un des dizaines, ou des centaines, ou des mille... de la racine, le quotient entier est inférieur à* 10, *ou à* 100, *ou à* 1000...

Dans l'exemple considéré, le quotient de la division du reste R par le

triple carré plus le triple plus un des centaines de la racine, ou par 2170000, est inférieur à 100.

On a, en effet, d'après le premier théorème,

$$654321987 < 900^3.$$

Or

$$900^3 = (8 + 1)^3 . 1000000$$

$$= (512 + 192 + 24 + 1) . 1000000 = 512000000 + 217000000.$$

Donc

$$654321987 < 512000000 + 217000000.$$

On tire, de là,

$$654321987 - 512000000 < 217000000, \quad \text{ou} \quad R < 217000000,$$

d'où, enfin,

$$\frac{R}{2170000} < 100.$$

*301. Théorème IV. *Si l'on divise le reste par le triple carré plus le triple plus un des dizaines, ou des centaines, ou des mille... de la racine, le quotient entier est une limite inférieure du nombre des unités de la racine.*

En effet, soit q le quotient entier de la division du reste R par 2170000 : on aura

$$142321987 > 2170000 . q,$$

et, par suite, en ajoutant 512000000 ou 800^3 à chaque membre, et en se rappelant que $217 = 3$ fois $8^2 + 3$ fois $8 + 1$,

$$654321987 > 800^3 + 3 \text{ fois } 800^2 . q + 3 \text{ fois } 800 . 100 . q + 100^2 . q.$$

Remplaçons, dans les deux derniers termes du second membre, le nombre 100 par le quotient q, qui, d'après le lemme précédent, est inférieur à 100 : l'inégalité subsistera à plus forte raison, et on aura

$$654321987 > 800^3 + 3 \text{ fois } 800^2 . q + 3 \text{ fois } 800 . q^2 + q^3,$$

ou

$$654321987 > (800 + q)^3.$$

Donc q est une *limite inférieure* du nombre des unités de la racine.

***302.** Théorème V. *Les deux limites supérieure et inférieure diffèrent au plus d'une unité, lorsque le nombre des dizaines de la racine est supérieur à* 10, *ou le nombre des centaines supérieur à* 100, *ou le nombre des mille supérieur à* 1000...

Raisonnons toujours dans le cas où la racine est partagée en centaines et unités, et désignons par a le nombre des centaines de cette racine.

La partie entière du quotient

$$\frac{R}{3a^2.10000}$$

est la limite supérieure, et la partie entière du quotient

$$\frac{R}{(3a^2 + 3a + 1).10000}$$

est la limite inférieure du nombre des unités de la racine. Or la différence de ces deux fractions est

$$\frac{R.(3a + 1)}{3a^2.(3a^2 + 3a + 1).10000},$$

ou

$$\frac{R}{(3a^2 + 3a + 1).10000} : \frac{3a^2}{3a + 1},$$

ou encore

$$\frac{R}{(3a^2 + 3a + 1).10000} : \left(a - \frac{a}{3a + 1}\right),$$

c'est-à-dire le quotient d'un nombre que nous avons démontré être inférieur à 100 (**300**) par un nombre plus grand que 100 : donc cette différence est inférieure à 1, et, par suite, les deux limites diffèrent au plus d'une unité.

J'ai dit que *le nombre*

$$a - \frac{a}{3a + 1}$$

est plus grand que 100. En effet, le nombre a, par hypothèse, est au moins égal à 101, et, de ce nombre, on retranche un nombre moindre que l'unité.

***303.** On déduit, des théorèmes qui précèdent, la règle suivante :

Pour extraire la racine cubique d'un nombre, dans le cas où cette racine doit avoir un grand nombre de figures, on détermine, par la méthode ordinaire, plus de la moitié des chiffres de cette racine; on obtient ensuite les autres chiffres en divisant le dernier reste, suivi des tranches non employées, par le triple carré de la racine déjà trouvée, suivi de deux fois autant de zéros qu'il reste de chiffres à obtenir : seulement le dernier chiffre à droite de la racine peut être trop fort d'une unité.

***304.** Soit proposé, par exemple, d'extraire, à un grand nombre de figures, la racine cubique de 17.

On détermine, par la méthode ordinaire, les quatre premiers chiffres de cette racine : on trouve **2'571**; le reste, abstraction faite du point décimal, est 5584589.

Pour avoir les trois chiffres suivants de la racine, on divise le reste, suivi de neuf zéros, par le triple carré de la racine, suivi de six zéros, ou 5584589000000000 par 19830123000000 : le quotient entier est **281** et le reste 12324437000000. Le produit du carré de ce quotient par le nombre formé du même quotient et du triple des mille de la racine, ou de 78961 par 7713281, est 609048381041, nombre moindre que le reste 12324437000000 : donc la racine cubique de 17, à sept figures exactes, est **2'571281**, et le reste est 11715388618959.

Pour avoir les six chiffres suivants de la racine, on divise le reste, suivi de dix-huit zéros, par le triple carré de la racine, suivi de douze zéros, ou 11715388618959.10^{18} par 19834457942883.10^{12} : le quotient entier est **590658** et le reste 7359331612986.10^{12}. Le produit du carré de ce quotient par le nombre formé du même quotient et du triple des millions de la racine, ou de 348876872964 par 7713843590658, est 2691181630442156683170312, nombre moindre que le reste 7359331612986.10^{12} : donc la racine cubique de 17, à treize figures exactes, est **2'571281590658**, et le reste est 4668149982543843316829688.

Et ainsi de suite.

CHAPITRE V

DE LA CONVERSION DES FRACTIONS ORDINAIRES EN FRACTIONS DÉCIMALES

305. *Convertir une fraction ordinaire en fraction décimale,* c'est chercher une fraction décimale qui soit égale à la fraction ordinaire donnée, ou qui en diffère de moins d'une unité d'un ordre décimal quelconque.

La fraction ordinaire qui donne naissance à une fraction décimale se nomme sa *génératrice.*

Nous appelons *limite, une quantité fixe, de laquelle une quantité variable se rapproche indéfiniment, sans pouvoir l'atteindre* (*).

306. Problème. *Convertir une fraction ordinaire en fraction décimale.*

Soit à convertir les fractions $\frac{15}{8}$, $\frac{16}{27}$, $\frac{5}{12}$ en fractions décimales.

Les fractions $\frac{15}{8}$, $\frac{16}{27}$, $\frac{5}{12}$ peuvent être considérées comme les quotients de la division de 15 par 8, de 16 par 27, de 5 par 12 (**242**).

15	8	160	27	50	12
8	**1·875**	135	**0·592592...**	48	**0·416666...**
70		250		20	
64		243		12	
60		70		80	
56		54		72	
40		16		8	
40					
0					

(*) Ainsi, lorsqu'on ajoute un même nombre, de plus en plus grand, aux deux termes d'une fraction plus petite que l'unité, cette fraction augmente, *en se rapprochant indéfiniment de l'unité,* qui est sa *limite* (**215**).

Dans les parties élevées des sciences mathématiques, on emploie une définition plus générale du mot *limite.*

Le problème revient donc à trouver, avec un certain nombre de décimales, le quotient de la division de deux nombres entiers.

Cette question a déjà été résolue (**281** et **282**). On trouve

$$\frac{15}{8} = 1{\cdot}875, \quad \frac{16}{27} = 0{\cdot}592592\ldots, \quad \frac{5}{12} = 0{\cdot}416666\ldots$$

307. Théorème I. *Deux fractions ordinaires égales donnent naissance à la même fraction décimale.*

Soit la fraction irréductible $\frac{a}{b}$. On sait que toute fraction égale à $\frac{a}{b}$ s'obtient en multipliant les deux termes a et b par un même nombre m. Or, quand on multiplie à la fois le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas, mais le reste est multiplié par ce nombre (**81**). Donc, soit qu'on divise a par b, ou am par bm, les chiffres du quotient ne cesseront d'être les mêmes dans tout le cours des deux opérations. Donc la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ et toutes les fractions égales à $\frac{a}{b}$ donnent naissance à la même fraction décimale.

Si, par exemple, on réduit en fractions décimales les fractions ordinaires égales $\frac{27}{16}$, $\frac{54}{32}$, $\frac{81}{48}$, etc., on trouve, pour quotient unique, d'un nombre limité de chiffres, **1·6875**.

De même, si l'on réduit en fractions décimales les fractions ordinaires égales $\frac{1}{73}$, $\frac{2}{146}$, $\frac{3}{219}$, etc., on trouve, pour quotient unique, d'un nombre illimité de chiffres, **0·001369863001369863**...

308. Théorème II. *Deux fractions ordinaires inégales ne peuvent donner naissance à la même fraction décimale.*

Ce théorème est évident, si la fraction décimale a un nombre limité de chiffres; car deux nombres égaux à un troisième sont égaux entre eux.

Considérons donc le cas où la fraction décimale a un nombre illimité de chiffres, et soient, s'il est possible, $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ deux fractions ordinaires inégales donnant naissance à cette fraction décimale.

Appelons k la différence des deux fractions $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$, et divisons A par B

et C par D. Soient, à un moment quelconque des deux opérations, Q le quotient décimal commun, m et n les deux restes. On a (**243**)

$$\frac{A}{B} = Q + \frac{m}{B}, \qquad \frac{C}{D} = Q + \frac{n}{D},$$

en sorte que la différence entre $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ est égale à la différence entre $\frac{m}{B}$ et $\frac{n}{D}$. Mais la division peut être poussée assez loin pour que les fractions $\frac{m}{B}$ et $\frac{n}{D}$, qui complètent le quotient Q, soient aussi petites qu'on le veut, *toutes deux moindres que* k, par exemple. La différence entre les deux fractions $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$, laquelle, par hypothèse, est égale à k, serait alors égale à la différence entre deux fractions moindres que k, ce qui est absurde.

Donc deux fractions ordinaires inégales ne peuvent donner naissance à la même fraction décimale.

Il résulte du théorème qui précède que, *si une fraction décimale, d'un* nombre limité ou illimité de chiffres, *a une génératrice, cette génératrice est unique.*

309. Théorème III. *Lorsque le dénominateur d'une fraction ordinaire ne renferme pas d'autres facteurs premiers que* 2 *ou* 5, *cette fraction est exactement convertible en fraction décimale.*

Soit la fraction $\frac{127}{800}$, dont le dénominateur 800 est égal à $2^5 \times 5^2$: je dis que cette fraction est exactement convertible en fraction décimale.

On a, en effet, en multipliant les deux termes de la fraction par 5^3,

$$\frac{127}{800} = \frac{127}{2^5 \times 5^2} = \frac{127 \times 5^3}{2^5 \times 5^5} = \frac{127 \times 5^3}{10^5}.$$

***310.** Théorème IV. *Lorsqu'une fraction ordinaire irréductible est exactement convertible en fraction décimale, celle-ci a un nombre de chiffres décimaux égal au plus grand des exposants des facteurs* 2 *ou* 5 *au dénominateur de la fraction ordinaire donnée.*

Soit la fraction ordinaire irréductible $\frac{127}{800}$, dont le dénominateur 800 est égal à $2^5 \times 5^2$: je dis que la fraction décimale équivalente a cinq chiffres décimaux.

En effet, la fraction proposée étant irréductible, son numérateur ne renferme aucun des facteurs premiers 2 et 5. Si l'on multiplie les deux termes par 5^3, ce qui donne $\frac{127 \times 5^3}{10^5}$, le nouveau numérateur ne contiendra pas encore le facteur 2 (**190**), et, par suite, ne sera pas divisible par 10. Puisque les deux termes de la fraction $\frac{127 \times 5^3}{10^5}$ ne sont pas divisibles par 10, il s'ensuit que cette fraction décimale ne peut être remplacée par aucune autre fraction décimale de dénominateur plus simple.

311. Théorème V. *Lorsque le dénominateur d'une fraction ordinaire irréductible renferme d'autres facteurs premiers que 2 ou 5, cette fraction n'est pas exactement convertible en fraction décimale.*

Soit, par exemple, la fraction ordinaire irréductible $\frac{5}{12}$, dont le dénominateur 12 renferme le facteur premier 3 : je dis que cette fraction n'est pas exactement convertible en fraction décimale.

En effet, la fraction $\frac{5}{12}$ étant irréductible, toute fraction égale à $\frac{5}{12}$ a ses deux termes équimultiples de 5 et de 12 (**219**). Or aucun multiple de 12 ne peut être une puissance de 10, car les puissances de 10 ne renferment pas d'autres facteurs premiers que 2 et 5 (**190**). Donc aucune fraction égale à $\frac{5}{12}$ ne peut être décimale.

Il s'ensuit que la fraction $\frac{5}{12}$ donne naissance à une fraction décimale d'un nombre illimité de chiffres.

312. Théorème VI. *La génératrice d'une fraction décimale, d'un nombre illimité de chiffres, est la limite vers laquelle tend cette fraction décimale, lorsqu'on prend un nombre de plus en plus grand de chiffres décimaux.*

Soit, par exemple, la fraction ordinaire $\frac{3}{7}$, qui donne naissance à la fraction décimale 0·428571..., d'un nombre illimité de chiffres (**311**). Les fractions décimales limitées successives

0·4, 0·42, 0·428, 0·4285, etc.,

diffèrent de $\frac{3}{7}$ respectivement *de moins d'un dixième, d'un centième, d'un millième, d'un dix-millième,* etc. On peut donc, dans la fraction décimale

0'428571..., prendre un nombre de chiffres décimaux assez grand pour que la différence entre la fraction décimale obtenue et la fraction $\frac{3}{7}$, sans jamais devenir nulle, devienne cependant *moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit.* Donc la fraction génératrice $\frac{3}{7}$ est la limite de la fraction décimale 0'428571..., dans laquelle on prend un nombre de plus en plus grand de chiffres décimaux.

CHAPITRE VI

DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES

313. Une fraction décimale d'un nombre illimité de chiffres est appelée *périodique,* lorsqu'un ou plusieurs chiffres décimaux se reproduisent dans le même ordre et indéfiniment.

Le nombre formé par les chiffres décimaux qui se reproduisent se nomme *période.*

Nous appelons *antipériode* le nombre formé par les chiffres décimaux qui précèdent la première période (*).

Une fraction décimale est dite périodique *simple* ou *mixte,* suivant que la période commence ou non au chiffre des dixièmes.

Ainsi la fraction 8'454545... est périodique simple, et la période est 45; la fraction 7'8666... est périodique mixte; la période est 6 et l'antipériode est 8.

314. Théorème I. *Toute fraction ordinaire, non exactement convertible en fraction décimale, donne naissance à une fraction décimale périodique.*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{3}{7}$, non exactement convertible en fraction décimale (**311**).

Si l'on convertit la fraction $\frac{3}{7}$ en fraction décimale, les restes successifs seront moindres que 7. D'ailleurs, par hypothèse, aucun de ces restes ne sera égal à zéro. Ces restes ne peuvent donc être que l'un des six nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6. Par conséquent, après six divisions au plus, on retombera

(*) Nous préférons le mot *antipériode,* pour dire *partie décimale non périodique,* l'expression *chiffres irréguliers,* employée par quelques auteurs.

sur un reste déjà obtenu, et, à partir de ce reste, les quotients et les restes se reproduiront dans le même ordre et indéfiniment.

On trouve, en effet, que la fraction $\frac{3}{7}$ donne naissance à la fraction décimale périodique 0·428571 428571 428571...

315. Théorème II. *Aucune fraction ordinaire ne peut donner naissance à une fraction décimale périodique dont la période soit* 9.

En effet, soit D le dénominateur de la fraction ordinaire que l'on convertit en fraction décimale. Supposons que, à partir d'un certain reste R, les chiffres du quotient soient tous égaux à 9 : les restes successifs seront aussi tous égaux à R. Car, si un reste m était différent de R, les fractions ordinaires inégales $\frac{R}{D}$ et $\frac{m}{D}$ donneraient naissance à la même fraction décimale, ce qui est impossible (**308**). Il s'ensuit qu'en écrivant un zéro à la droite du reste R, et en divisant 10R par D, le quotient est égal à 9 et le nouveau reste aussi égal à R. On a donc (**65**)

$$10R = 9D + R,$$

d'où R = D; c'est-à-dire que *le reste* R *serait égal au diviseur* D, ce qui est impossible. Donc aucune fraction ordinaire ne peut engendrer de fraction décimale périodique dont la période soit 9 (*).

316. Théorème III. *Toute fraction décimale périodique, dont la période est* 9, *a pour limite la partie non périodique, augmentée d'une unité de l'ordre de son dernier chiffre.*

Soit, par exemple, la fraction décimale périodique **0·24999**..., dont la période est 9. Je dis qu'elle a pour limite la fraction **0·25**, obtenue en ajoutant 1 au dernier chiffre de la partie non périodique 0·24.

En effet, la différence entre la fraction 0·25 et les fractions 0·249, 0·2499, 0·24999, 0·249999, etc., est respectivement égale à *un millième,*

(*) Si, dans un sens impropre, on veut admettre que le reste puisse être égal au diviseur, on pourra dire que *les génératrices des fractions décimales limitées sont aussi les génératrices de fractions décimales périodiques dont la période est* 9.

Par exemple, la fraction $\frac{1}{4}$ engendre la fraction décimale limitée 0·25 ou la fraction décimale périodique 0·24999...

un dix-millième, un cent-millième, un millionième, etc., c'est-à-dire que cette différence, sans pouvoir devenir nulle, peut cependant devenir *moindre que toute quantité donnée, si petite qu'elle soit.* Donc la fraction 0·25 est la limite de la fraction 0·249999..., dans laquelle on prend un nombre de plus en plus grand de périodes.

On verrait, de même, que les fractions décimales périodiques **0·999**..., **0·1999**..., **0·004999**..., etc., ont respectivement pour limites **1**, **0·2**, **0·005**, etc.

Génératrices des fractions décimales périodiques.

317. Problème I. *Trouver la fraction ordinaire génératrice d'une fraction décimale périodique simple, sans partie entière.*

On suppose, dans ce problème et les deux suivants, que la période n'est pas uniquement composée de chiffres 9 (**316**).

Soit, par exemple, la fraction décimale périodique simple **0·454545**..., qui n'a pas de partie entière, et dont la période est 45.

Écrivons deux zéros à la droite de cette période, c'est-à-dire autant de zéros que la période a de chiffres. On aura

$$4500 = 100 \times 45,$$

ou, en décomposant 100 en 99 + 1,

$$4500 = (99 + 1) \times 45,$$

ou

$$4500 = 99 \times 45 + 45.$$

Ainsi le nombre 4500 est égal au produit de 99 par 45, plus 45.

Il suit de là que, *si l'on divise* 4500 *par* 99, *le quotient entier sera* 45, *et le reste* 45.

Dès lors, si, pour réduire la fraction $\frac{45}{99}$ en fraction décimale, on écrit d'abord deux zéros à la droite du dividende 45, on trouve au quotient 0·45 et pour reste 45; si l'on écrit deux zéros à la droite de ce reste 45, on trouve au quotient 45 et pour reste 45, et ainsi de suite; en un mot, on obtient pour quotient la fraction décimale périodique 0·454545...

Donc la fraction $\frac{45}{99}$ ou $\frac{5}{11}$ est la génératrice de la fraction décimale périodique simple 0·454545...

On sait, d'ailleurs, qu'aucune autre fraction ordinaire ne peut donner naissance à la même fraction décimale périodique (**308**) (*).

En partant des égalités

$$6 \times 10 = 6 \times 9 + 6,$$

$$259 \times 1000 = 259 \times 999 + 259,$$

$$6993 \times 1000\,000 = 6993 \times 999\,999 + 6993,$$

on prouverait, de même, que les fractions décimales périodiques simples

0·666..., **0·259259259...**, **0·006993006993006993...**

ont respectivement pour génératrices les fractions ordinaires

$$\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{9}} \text{ ou } \frac{2}{3}, \quad \frac{\mathbf{259}}{\mathbf{999}} \text{ ou } \frac{7}{27}, \quad \frac{\mathbf{6993}}{\mathbf{999\,999}} \text{ ou } \frac{1}{143}.$$

On conclut de ce qui précède la règle suivante :

Pour former la fraction ordinaire génératrice d'une fraction décimale périodique simple, sans partie entière, on prend pour numérateur la période et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 *qu'il y a de chiffres dans la période.*

***318.** On peut résoudre la même question de la manière suivante :

Soit, *si elle existe,* $\frac{a}{b}$ la fraction ordinaire génératrice de la fraction décimale périodique simple **0·454545...** On doit avoir $a < b$, et, en écrivant deux zéros à la droite de a, puis en divisant $100a$ par b, on doit trouver au quotient 45 et pour reste a. On doit donc avoir l'égalité (**65**)

$$100\,a = 45\,b + a, \quad \text{ou} \quad 99\,a = 45\,b,$$

d'où, en divisant les deux membres par $99\,b$,

$$\frac{a}{b} = \frac{45}{99}.$$

(*) Le raisonnement qui précède subsiste dans le cas où la période est 9, si l'on admet que le reste d'une division puisse être égal au diviseur.

Il existe donc une fraction génératrice de la fraction décimale périodique simple 0·454545..., savoir, la fraction ordinaire $\frac{45}{99}$, que l'on obtient *en divisant la période 45 par un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans cette période* (*).

319. Problème II. *Trouver la fraction ordinaire génératrice d'une fraction décimale périodique simple, ayant une partie entière.*

Soit la fraction décimale périodique simple **8·454545**..., laquelle a pour partie entière 8 et pour période 45.

La fraction 0·454545... ayant pour génératrice la fraction $\frac{45}{99}$ (**317**), la fraction 8·454545... aura pour génératrice une fraction égale au nombre **8** $\frac{45}{99}$, savoir, la fraction (**209**)

$$\frac{8.99 + 45}{99}.$$

Mais

$$8.99 + 45 = 8.(100 - 1) + 45 = 800 - 8 + 45 = 845 - 8.$$

Donc la fraction génératrice cherchée est

$$\frac{845 - 8}{99} \text{ ou } \frac{93}{11}.$$

On conclut de là la règle suivante :

Pour former la fraction ordinaire génératrice d'une fraction décimale périodique simple, ayant une partie entière, on prend pour numérateur la partie entière suivie d'une période, moins la partie entière, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 qu'il y a de chiffres dans la période.

320. Problème III. *Trouver la fraction ordinaire génératrice d'une fraction décimale périodique mixte.*

(*) Le raisonnement qui précède, appliqué à la fraction décimale périodique simple 0·999..., conduirait à la condition

$$10\,a = 9\,b + a,$$

d'où $a = b$, ce qui est impossible. Il n'existe donc pas de génératrice d'une fraction décimale périodique simple, dont la période est 9, à moins d'admettre que le reste d'une division puisse être égal au diviseur.

Soit la fraction décimale périodique mixte **6·25333**..., laquelle a pour partie entière 6, pour antipériode 25 et pour période 3.

La fraction 625·333... ayant pour génératrice (**319**) la fraction

$$\frac{6253 - 625}{9},$$

la fraction 6·25333... aura pour génératrice la fraction

$$\frac{\mathbf{6253 - 625}}{\mathbf{900}} \text{ ou } \frac{469}{75};$$

car multiplier le diviseur 9 par 100 revient à déplacer, dans le quotient, le point décimal de deux rangs vers la gauche.

On conclut de là la règle suivante :

Pour former la fraction ordinaire génératrice d'une fraction décimale périodique mixte, on prend pour numérateur la partie entière suivie de l'antipériode et d'une période, moins la partie entière suivie de l'antipériode, et pour dénominateur un nombre composé d'autant de 9 *qu'il y a de chiffres dans la période, suivis d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans l'antipériode.*

321. On a vu (**312**) que la *génératrice* d'une fraction décimale périodique est la *limite* vers laquelle tend cette fraction, lorsqu'on prend un nombre de plus en plus grand de chiffres décimaux. Les règles données pour former les génératrices des fractions décimales périodiques servent donc en même temps à trouver leurs limites, et on peut observer qu'elles sont applicables à la recherche des limites des fractions décimales périodiques dont la période est 9, pour lesquelles nous avons donné précédemment (**316**) une règle plus simple.

***322.** On peut aussi se proposer de rechercher *directement* la *limite* d'une fraction décimale périodique, dans laquelle on prend un nombre de plus en plus grand de périodes.

Soit proposé, par exemple, de trouver la limite de la fraction décimale périodique simple **0·454545**..., c'est-à-dire *la limite des fractions décimales* 0·45, 0·4545, 0·454545..., *obtenues en prenant successivement une, deux, trois... périodes.*

Désignons ces fractions décimales successives par a, b, c... On aura

$$a = 0'45,$$
$$b = 0'45 + 0'0045,$$
$$c = 0'45 + 0'0045 + 0'000045,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Multiplions les deux membres de chacune de ces égalités par 100, c'est-à-dire par l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y a de chiffres dans la période. On aura

$$100\,a = 45,$$
$$100\,b = 45 + 0'45,$$
$$100\,c = 45 + 0'45 + 0'0045,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Enfin, soustrayons membre à membre ces deux suites d'égalités. On aura

$$99\,a = 45 - 0'45,$$
$$99\,b = 45 - 0'0045,$$
$$99\,c = 45 - 0'000045,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où, en divisant par 99,

$$a = \frac{45}{99} - \frac{0'45}{99},$$
$$b = \frac{45}{99} - \frac{0'0045}{99},$$
$$c = \frac{45}{99} - \frac{0'000045}{99},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit :

1° Que les fractions a, b, c, etc., sont toutes inférieures à $\frac{45}{99}$;

2° Qu'elles diffèrent de $\frac{45}{99}$ respectivement des quantités $\frac{0'45}{99}$, $\frac{0'0045}{99}$, $\frac{0'000045}{99}$, etc., c'est-à-dire de quantités qui sont de cent en cent fois plus petites.

On peut donc, dans la fraction décimale périodique 0'454545..., prendre n nombre suffisamment grand de périodes, pour que la différence entre fraction décimale obtenue et la fraction $\frac{45}{99}$, sans jamais devenir nulle, evienne cependant *moindre qu'une quantité donnée, si petite qu'elle soit.* onc la fraction $\frac{45}{99}$ est la *limite* de la fraction décimale périodique 0'454545..., ans laquelle on prend un nombre de plus en plus grand de périodes.

Il reste à démontrer que la limite trouvée $\frac{45}{99}$ est la *génératrice* de la action décimale périodique 0'454545... Pour cela, on part de l'égalité

$$4500 = 99 \times 45 + 45,$$

iquelle fait voir qu'en divisant 45, suivi de deux zéros, par 99, on a pour uotient entier 45 et pour reste aussi 45, et, par suite, qu'en réduisant $\frac{45}{99}$ n décimales, on obtient la fraction décimale périodique 0'454545... (**317**).

Le cas où la fraction décimale périodique aurait une partie entière ou erait mixte se ramène au cas précédent.

***323.** Théorème IV. *Le dénominateur d'une fraction ordinaire irréductible, qui donne lieu à une fraction décimale périodique simple, ne renferme ni le facteur 2 ni le facteur 5.*

En effet, lorsque la fraction décimale est périodique simple, le dénominateur de la fraction génératrice, avant toute simplification, est terminé ar 9 (**317** et **319**) : il ne renferme donc ni le facteur 2 ni le facteur 5. t il ne peut qu'en être de même lorsqu'on a simplifié la fraction.

***324.** Théorème V. *Le dénominateur d'une fraction ordinaire irréductible, qui donne lieu à une fraction décimale périodique mixte, renferme, vec d'autres facteurs premiers, l'un au moins des facteurs premiers 2 et 5.*

En effet, lorsque la fraction décimale est périodique mixte, le dénominateur de la fraction génératrice, avant toute simplification, est terminé ar un ou plusieurs zéros (**320**) : il renferme donc une ou plusieurs fois s facteurs premiers 2 et 5. D'un autre côté, le numérateur, *ne pouvant re terminé par zéro,* ne peut renfermer à la fois ces deux facteurs premiers. Par conséquent, après toute simplification, le dénominateur contient encore u tous les facteurs 2 ou tous les facteurs 5 qu'il contenait auparavant.

J'ai dit que *le numérateur ne peut être terminé par zéro;* car, s'il se terminait par zéro, le dernier chiffre de la partie décimale non périodique serait le même que le dernier chiffre de la période, et alors la période commencerait un rang plus tôt qu'on ne l'a supposé.

325. Théorème VI. *Lorsqu'une fraction ordinaire irréductible donne lieu à une fraction décimale périodique mixte, l'antipériode a un nombre de chiffres égal au plus grand des exposants des facteurs 2 ou 5 au dénominateur de la fraction ordinaire donnée.*

En effet, comme on vient de le voir (**324**), le dénominateur de la fraction génératrice d'une fraction décimale périodique mixte conserve, après toute simplification, tous les facteurs 2 ou 5 qu'il renfermait auparavant. Or il y a autant de ces facteurs 2 ou 5 qu'il y a, avant la simplification, de zéros à la droite du dénominateur, c'est-à-dire (**320**) autant qu'il y a de chiffres dans l'antipériode.

Opérations sur les fractions décimales périodiques.

326. On appelle *somme, différence, produit, quotient* de deux fractions décimales périodiques, la somme, la différence, le produit ou le quotient de leurs limites.

On a, par exemple,

$$0{\cdot}906666\ldots + 0{\cdot}454545\ldots = \frac{816}{900} + \frac{45}{99} = \frac{4492}{3300} = 1{\cdot}36121212\ldots;$$

$$0{\cdot}906666\ldots - 0{\cdot}454545\ldots = \frac{816}{900} - \frac{45}{99} = \frac{1492}{3300} = 0{\cdot}45212121\ldots;$$

$$0{\cdot}906666\ldots \times 0{\cdot}454545\ldots = \frac{816}{900} \times \frac{45}{99} = \frac{136}{330} = 0{\cdot}4121212\ldots;$$

$$0{\cdot}906666\ldots : 0{\cdot}454545\ldots = \frac{816}{900} : \frac{45}{99} = \frac{5984}{3000} = 1{\cdot}994666\ldots \text{ (*)}$$

(*) Toutes les propositions établies dans ce chapitre et dans le précédent sont applicables à des fractions écrites dans un système quelconque de numération : il suffit de remplacer les nombres 2 et 5 par les diviseurs de la base de ce système, et le chiffre 9 par celui qui représente la base diminuée d'une unité.

CHAPITRE VII

DES NOMBRES INCOMMENSURABLES

***327.** Soit proposé de définir la racine carrée de 2.

Nous avons vu (**253**) qu'*il n'existe aucun nombre, soit entier, soit fractionnaire, dont le carré soit égal à* 2 : $\sqrt{2}$ est donc un symbole qui, *jusqu'ici,* n'a aucun sens pour nous (*).

Pour arriver, s'il est possible, à définir $\sqrt{2}$, multiplions et divisons le nombre 2 par les puissances successives de 100, ou d'un carré quelconque; nous obtiendrons cette suite de fractions, toutes égales à 2 :

$$\frac{2.1}{1},\quad \frac{2.100}{100},\quad \frac{2.100^2}{100^2},\quad \frac{2.100^3}{100^3},\quad \frac{2.100^4}{100^4}\cdots$$

Prenons, à moins d'une unité par défaut et par excès, la racine carrée du numérateur de chaque fraction, et divisons-la par la racine carrée du dénominateur; nous formerons ces deux nouvelles suites :

1,	1·4,	1·41,	1·414,	1·4142,...	(A)
2,	1·5,	1·42,	1·415,	1·4143,...	(B)

Or, d'une part :

1° *Les nombres* A *vont en augmentant;*

2° *Les nombres* B *vont en diminuant ;*

3° *Les différences entre les nombres* A *et les nombres* B sont successivement égales à 1, 0·1, 0·01, 0·001, 0·0001, etc., c'est-à-dire *diminuent indéfiniment.*

D'autre part :

1° *Les carrés des nombres* A *vont en augmentant;*

(*) Si l'on disait : *on appelle racine carrée de 2, un nombre qui, multiplié par lui-même, reproduit* 2, on commettrait un *cercle vicieux;* car la définition de la multiplication par $\sqrt{2}$, exige, *préalablement,* la définition de $\sqrt{2}$.

Si l'on disait : *un nombre incommensurable est la limite de ses valeurs commensurables approchées, par défaut ou par excès, à moins d'une unité fractionnaire quelconque,* on commettrait aussi un *cercle vicieux;* car on ne peut parler de valeurs approchées d'un nombre, *non encore défini.*

2° *Les carrés des nombres* B *vont en diminuant;*

3° *Les différences entre les carrés des nombres* A *et les carrés des nombres* B sont successivement moindres que 3 (*), 0·3, 0·03, 0·003, 0·0003, etc., c'est-à-dire *diminuent indéfiniment*. On a, en effet,

$$B^2 - A^2 = (B + A)(B - A);$$

c'est-à-dire *la différence des carrés des deux nombres* B *et* A *est égale à la somme de ces nombres multipliée par leur différence*. Or la somme B + A est constamment moindre que 3, et la différence B — A est successivement égale à 1, 0·1, 0·01, 0·001, 0·0001, etc. Donc la différence $B^2 - A^2$ est successivement moindre que 3, 0·3, 0·03, 0·003, 0·0003, etc., c'est-à-dire diminue indéfiniment;

4° *Les carrés des nombres* A *et les carrés des nombres* B *ont pour limite commune le nombre* 2. En effet, les différences $2 - A^2$ et $B^2 - 2$ sont moindres, chacune, que la différence $B^2 - A^2$, laquelle, d'après la remarque précédente, diminue indéfiniment.

Puisque les carrés des nombres A et B diffèrent d'aussi peu qu'on le veut et tendent vers une limite commune, 2, *on convient d'admettre* que les nombres A et B, qui diffèrent eux-mêmes d'aussi peu qu'on le veut, tendent aussi vers une limite commune, que l'on appelle *la racine carrée de* 2.

D'après cette convention, *la racine carrée de* 2 *est la limite des nombres dont les carrés ont pour limite* 2.

Il est bien entendu, d'après ce qui précède, que le nombre $\sqrt{2}$ n'a pas d'existence *réelle;* il n'a qu'une existence *conventionnelle*. En d'autres termes, il n'existe pas de nombre qui soit la racine carrée de 2; mais *on convient d'admettre* qu'il en existe un. Et cette convention une fois faite, le nombre $\sqrt{2}$ jouit *nécessairement* des propriétés suivantes :

1° *Il est supérieur aux nombres* A *et inférieur aux nombres* B;

2° *Il est la commune limite des nombres* A *et des nombres* B;

3° *Son carré est égal à* 2.

(*) La première somme est égale à 3; mais, pour abréger l'écriture et le langage, on convient souvent que les signes $>$ et $<$, ou les expressions ***plus grand que*** et ***plus petit que***, n'excluent pas l'égalité. On écrit, par exemple, $a > b$, c'est-à-dire : a ***plus grand que*** b, au lieu de $a \geqq b$, c'est-à-dire : a ***égal ou supérieur à*** b.

***328.** En général, on appelle *racine* n^e^ *d'un nombre* A, qui n'est puissance n^e d'aucun nombre entier ni fractionnaire, *la limite des nombres dont les puissances* n^es^ *ont pour limite* A.

Par une extension nouvelle de l'idée attachée au mot *nombre*, on a donné à ces racines le nom de *nombres irrationnels*.

Les nombres irrationnels sont aussi appelés *incommensurables*, par opposition aux nombres entiers et fractionnaires, qui sont appelés *nombres commensurables* (*).

***329.** On appelle *somme, différence, produit, quotient* de deux nombres irrationnels, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{3}$, par exemple, *la limite de la somme, différence, produit ou quotient des nombres dont les carrés ont pour limites* 5 *et* 3.

On définirait le sens de cette limite en répétant les raisonnements ci-dessus.

***330.** Cette considération des limites prouve encore que *les théorèmes démontrés pour des nombres commensurables quelconques subsistent pour les nombres incommensurables limites des premiers.*

Par exemple, *le produit de deux nombres incommensurables ne change pas, quand on intervertit l'ordre des facteurs.*

Soient, en effet, a, a', a''... (**) des nombres commensurables ayant pour limite le nombre incommensurable A, et b, b', b''... des nombres commensurables ayant pour limite le nombre incommensurable B. On a :

$$a \times b = b \times a, \qquad a' \times b' = b' \times a', \qquad a'' \times b'' = b'' \times a''...$$

Mais, *par définition*, la limite des premiers membres est A × B, et la limite des seconds membres est B × A. D'ailleurs, *une même variable ne peut avoir qu'une limite*. Donc

$$A \times B = B \times A.$$

(*) Il existe d'autres nombres incommensurables que les nombres irrationnels; ce sont les *nombres transcendants*, c'est-à-dire qui ne peuvent être racines d'une équation de degré quelconque à coefficients entiers ou formés d'irrationnelles. Le nombre π, rapport de la circonférence au diamètre, et le nombre e, base des logarithmes naturels, sont des nombres transcendants.

(**) Prononcez : a, a *prime*, a *seconde*...

CHAPITRE VIII

DES ERREURS ABSOLUES (*)

***331.** L'*erreur absolue* d'une quantité, approchée par excès ou par défaut, est la différence entre cette quantité et la quantité exacte dont elle est une valeur approchée.

Ainsi l'erreur absolue du nombre **960** ou **954**, considéré comme une valeur approchée de 957, est égale à 3 unités.

***332.** *Pour exprimer, à moins d'une unité entière ou décimale, d'un ordre énoncé, la valeur d'un nombre entier ou décimal, on supprime les chiffres écrits à la droite de celui qui représente les unités de cet ordre, en augmentant ou non d'une unité le dernier chiffre conservé, et en remplaçant par des zéros les chiffres supprimés à gauche du point décimal.*

Ainsi la valeur approchée du nombre 3141·5926, avec une erreur absolue moindre qu'*un dixième*, est **3141·5** ou **3141·6**. L'erreur absolue est égale, dans le premier cas, à 0·0926, et, dans le second cas, à 0·1 — 0·0926.

La valeur approchée du même nombre, avec une erreur absolue moindre qu'*une centaine*, est **3100** ou **3200**. L'erreur absolue est égale, dans le premier cas, à 41·5926, et, dans le second cas, à 100 — 41·5926.

Si, lorsque le premier chiffre supprimé est 5 ou supérieur à 5, on augmente le dernier chiffre conservé d'une unité, l'erreur absolue est moindre qu'une demi-unité de l'ordre de ce dernier chiffre.

Ainsi la valeur du nombre 3141·5926 est **3141·6**, à moins d'*un demi-dixième* par excès, et **3100**, à moins d'*une demi-centaine* par défaut.

(*) M. Lionnet, Examinateur de la Marine de France, a bien voulu nous autoriser à emprunter ce chapitre et les deux suivants à son traité des *Approximations numériques*, Paris 1857.

Addition abrégée.

***333.** *Pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale, d'un ordre énoncé, la somme de plusieurs nombres, entiers ou décimaux, on additionne les nombres proposés en faisant abstraction, dans chacun d'eux, des chiffres placés à la droite de celui qui exprime des unités dix fois plus petites que celles de l'ordre énoncé; puis on supprime un chiffre sur la droite du résultat ainsi obtenu, en augmentant d'une unité le dernier chiffre conservé.*

3141·5926535
318·3098861
1414·2135623
173·20508075
2236·0679774
30·102999569
4771·212547
698·9700043
12783·64
12783·7

En appliquant cette règle aux huit nombres ci-contre, dont on se propose de trouver la somme *à moins d'un dixième,* on obtient **12783·7.**

En effet, en faisant abstraction des chiffres qui expriment des unités d'un ordre inférieur à celui des centièmes, on a commis, sur chacun des huit nombres proposés, une erreur absolue, par défaut, moindre qu'un centième; donc l'erreur par défaut, commise sur leur somme, est moindre que 8 centièmes, ou, plus généralement, moindre que 11 centièmes, *en supposant qu'on n'additionne pas plus de* 11 *nombres.* De plus, en supprimant le chiffre 4 sur la droite du résultat 12783·64 ainsi obtenu, on a commis une nouvelle erreur, par défaut, égale à 4 centièmes, et, en général, au plus égale à 9 centièmes. Donc, si l'on remplaçait la somme exacte par la valeur approchée 12783·6, on commettrait une erreur, par défaut, moindre que 11 + 9 centièmes, ou que 2 dixièmes. Donc, enfin, si l'on ajoute 1 dixième à 12783·6, le résultat **12783·7** et la somme exacte différeront entre eux d'une quantité égale à la différence entre 1 dixième et un nombre moindre que 2 dixièmes, c'est-à-dire d'une quantité moindre que 1 dixième.

Si l'on additionnait plus de 11 *nombres et moins de* 102, on conserverait, dans chacun des nombres proposés, deux chiffres, au lieu d'un seul, à la droite de celui qui exprime des unités de l'ordre énoncé, puis on supprimerait deux chiffres, au lieu d'un seul, sur la droite de la somme obtenue.

Soustraction abrégée.

***334**. *Pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale, d'un ordre énoncé, la différence de deux nombres entiers ou décimaux, on effectue la soustraction en supprimant, dans chacun de ces deux nombres, les chiffres placés à la droite de celui qui exprime des unités de l'ordre énoncé.*

31·415 926 535
14·142 135 623
———————
17·273

En appliquant cette règle aux deux nombres ci-contre, dont on se propose de trouver la différence *à moins d'un millième*, on obtient **17·273**.

En effet, en supprimant les chiffres qui expriment des unités d'un ordre inférieur à celui des millièmes, on a commis, sur chacun des nombres proposés, une erreur absolue, par défaut, moindre qu'un millième; donc l'erreur commise sur la différence exacte, remplacée par **17·273**, est la différence de deux nombres moindres qu'un millième, et, par suite, plus petite elle-même qu'un millième.

Multiplication abrégée.

***335**. *Pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale, d'un ordre énoncé, le produit de deux nombres entiers ou décimaux, on écrit, dans un ordre inverse, les chiffres du multiplicateur sous le multiplicande, de manière que le chiffre des unités simples corresponde à celui du multiplicande qui exprime des unités cent fois plus petites que celles de l'ordre énoncé; on multiplie le multiplicande successivement par chacun des chiffres du multiplicateur, à partir de la droite, en faisant abstraction des chiffres du multiplicande placés à la droite de celui qui sert de multiplicateur; on écrit chacun de ces produits partiels au-dessous du multiplicande, de manière que leurs premiers chiffres à droite soient dans la même colonne verticale; enfin, on additionne tous ces produits, considérés comme exprimant des unités cent fois plus petites que celles de l'ordre énoncé, et on supprime deux chiffres sur la droite du résultat, en augmentant d'une unité le dernier chiffre conservé.*

En appliquant cette règle aux deux nombres 3·14 159 et 27·1828, dont on se propose de trouver le produit *à moins d'un dixième*, on obtient **85·4**.

En effet, la partie du multiplicande écrite à la droite du premier chiffre 2 employé comme multiplicateur étant moindre qu'un dix-millième, en omettant de la multiplier par 20, on a diminué le produit d'un nombre moindre que 2 millièmes. La partie du multiplicande écrite à la droite du deuxième chiffre 7 employé comme multiplicateur étant moindre qu'un millième, en omettant de la multiplier par 7, on a diminué le produit d'un nombre moindre que 7 millièmes. Raisonnant de la même manière à l'égard des chiffres suivants employés comme multiplicateurs, on voit qu'on a successivement diminué le produit de trois nombres formant une somme moindre que 1 + 8 + 2 millièmes. Enfin, le multiplicande étant moindre que 10, et la partie du multiplicateur écrite à sa gauche étant moindre que 8 + 1 dix-millièmes, en omettant de multiplier le multiplicande par cette partie du multiplicateur, on a diminué le produit d'un nombre moindre que 8 + 1 millièmes. Donc, en définitive, si l'on remplaçait le produit exact par le produit 85·385 obtenu précédemment, on diminuerait le premier produit d'un nombre moindre que 2 + 7 + 1 + 8 + 2 + 8 + 1 millièmes, ou, plus généralement, d'un nombre moindre que 101 millièmes, *en supposant que la somme* 2 + 7 + 1 + 8 + 2 + 8 *n'excède pas le nombre* 100. De plus, si, après avoir supprimé les deux premiers chiffres à droite du nombre 85·385, on le remplaçait par le nombre 85·3, on diminuerait encore le produit exact de 85 millièmes, c'est-à-dire d'un nombre qui ne peut excéder 99 millièmes. Donc la diminution totale du produit exact serait moindre que 101 + 99 millièmes, ou que 2 dixièmes. Donc, enfin, si l'on ajoute 1 dixième à 85·3, le résultat **85·4** et le produit exact différeront entre eux d'une quantité égale à la différence entre 1 dixième et un nombre moindre que 2 dixièmes, c'est-à-dire d'un nombre moindre que 1 dixième.

```
  3·1 4 1 5 9
8 2 8 1·7 2
-------------
  6 2 8 3 0
  2 1 9 8 7
      3 1 4
      2 4 8
          6
-------------
  8 5·3 8 5
  8 5·4
```

***336.** La règle précédente, connue sous le nom de *règle d'Oughtred,* suppose le cas très général où la somme des chiffres employés au multiplicateur, augmentée du premier des chiffres négligés, n'excède pas 100.

Dans le cas où cette somme serait comprise entre 100 et 1001, on écrirait le chiffre des unités simples du multiplicateur sous celui du multiplicande qui exprime des unités mille fois plus petites que celles de l'ordre énoncé, puis on supprimerait trois chiffres, au lieu de deux, sur la droite du produit obtenu.

Mais, si cette même somme n'excédait pas 10, il suffirait de placer le chiffre des unités du multiplicateur sous celui du multiplicande qui exprime des unités dix fois moindres que celles de l'ordre énoncé, et de supprimer un seul chiffre sur la droite du produit obtenu.

***337.** Il est utile d'observer qu'en intervertissant l'ordre des deux facteurs proposés, on obtiendrait la même valeur approchée, d'où résulte un moyen de faire la preuve d'une multiplication abrégée.

Il en résulte aussi que la limite $2 + 7 + 1 + 8 + 2 + 8 + 1$ millièmes de la somme des erreurs, par défaut, commises en premier lieu sur le produit exact, peut être remplacée par la somme analogue $3 + 1 + 4 + 1 + 5 + 9 + 1$ millièmes, provenant des chiffres du multiplicande.

Division abrégée.

***338.** *Lorsqu'on remplace un diviseur plus grand que l'unité par sa partie entière, l'erreur absolue du quotient approché est moindre que le quotient exact divisé par la partie entière du diviseur.*

Car, en remplaçant, par exemple, le diviseur exact 15·9 par 15, on multiplie ce diviseur par $\frac{15}{15 \cdot 9}$, et, par suite, on divise le quotient exact par cette fraction, ou, ce qui revient au même, on le multiplie par $\frac{15 \cdot 9}{15}$, qui est un nombre moindre que $1 + \frac{1}{15}$; de sorte qu'en définitive on augmente le quotient exact d'une quantité moindre que sa quinzième partie.

***339.** *Pour trouver, à moins d'une unité entière ou décimale, d'un ordre énoncé, le quotient de deux nombres entiers ou décimaux, on commence par déterminer l'ordre des plus grandes unités du quotient exact, et, par suite, le nombre* n *des chiffres du quotient demandé. On place ensuite le point décimal au diviseur de manière que sa partie entière soit au moins égale à* n *et la plus petite possible, puis on l'avance de* n *rangs vers la*

droite. Enfin, on place le point décimal au dividende de manière qu'il soit au moins égal au nouveau diviseur et le plus petit possible.

Cela étant, on divise la partie entière du nouveau dividende par celle du nouveau diviseur, ce qui donne le chiffre des plus hautes unités du quotient et un reste qu'on divise par le diviseur précédent privé de son dernier chiffre, ce qui donne le second chiffre du quotient, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on ait effectué n *divisions partielles; alors on fait en sorte que le dernier chiffre du quotient exprime des unités de l'ordre énoncé.*

Soit proposé, par exemple, de trouver le quotient de 3·141592653 par 0·069314718, *à moins d'un dixième.*

On reconnaît immédiatement que le premier chiffre significatif du quotient exact exprime des dizaines, et, comme le dernier chiffre du quotient demandé doit exprimer des dixièmes, ce quotient aura *trois* chiffres : donc on prendra 6931 pour premier diviseur partiel, et, en observant la règle précédente, on trouvera **45·3** pour le quotient demandé.

3 1 4 1 5 9 2·6 . . .	6 9·3·1·4 . . .
2 7 7 2 4	4 5 3
3 6 9 1 9·2·6 . . .	**4 5·3**
3 4 6 5	
2 2 6·9·2	
2 0 7	
1 9·9	

3 1 4 1 5	6 9 3 1
2 7 7 2 4	4 5 3
3 6 9 1	**4 5·3**
3 4 6 5	
2 2 6	
2 0 7	
1 9	

En effet, en multipliant le dividende proposé par 10, on ramène la question à la recherche du quotient de 31·415926... par 0·069314... *à moins d'une unité;* et, en multipliant le nouveau dividende et le diviseur par 100000, ce qui ne change pas le quotient, on est conduit à chercher, *à moins d'une unité,* le quotient de 3141592·6... par 6931·4...

Cela étant, si l'on remplace le diviseur 6931·4... par sa partie entière 6931, on commettra, sur le quotient exact, une erreur absolue moindre que ce quotient divisé par 6931 (**338**). Mais ce quotient, ayant trois chiffres à sa partie entière, est moindre que 1000, tandis que la partie entière du

diviseur, commençant par le chiffre 6, est au moins égale à 6000. Donc, en prenant 6931 pour premier diviseur, on augmentera le quotient exact d'une quantité moindre que 1000 : 6000, ou qu'*un sixième.*

Pour obtenir les centaines de ce quotient approché, on est conduit à diviser le nombre total 31415 des centaines du dividende par 6931, ce qui donne 4 centaines au quotient et un reste total 369192·6... qu'il faudrait diviser par 6931 pour compléter la valeur du quotient exact, approchée par excès à moins d'*un sixième.* Mais, en divisant ces deux nombres par 10, on ramène l'opération à la division de 36919·2... par 693·1...

Ce nouveau quotient n'ayant que deux chiffres à sa partie entière est moindre que 100, tandis que la partie entière du diviseur est au moins égale à 600. Donc, en remplaçant ce dernier par 693, on augmentera le quotient d'une quantité moindre que 100 : 600, ou qu'*un sixième,* et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'ayant obtenu le quotient 453 et le reste 19·9..., on ait *augmenté* le quotient exact d'une quantité moindre que *trois sixièmes,* c'est-à-dire moindre qu'*une unité.*

D'un autre côté, en négligeant de diviser le reste 19·9..., moindre que 69, par le dernier diviseur, on a *diminué* le quotient d'une quantité moindre qu'*une unité.*

Donc, en définitive, l'erreur absolue du quotient approché 453 est moindre qu'une unité, et, en divisant le nombre entier 453 par 10, le quotient **45·3** sera une valeur approchée du quotient demandé, *à moins d'un dixième.*

***340.** La règle et la démonstration précédentes n'exigent aucune modification dans le cas particulier où un dividende partiel contient 10 fois le diviseur qui lui correspond. On prend alors 10 pour quotient partiel; et, si l'on continue d'observer la règle de la division abrégée, on reconnaît immédiatement que tous les quotients partiels suivants sont nuls. De plus, on est certain que le quotient ainsi obtenu est approché par excès; car aucun quotient partiel ne peut exprimer plus de 9 unités dans le quotient exact, et, d'ailleurs, le nombre formé par les chiffres déjà écrits au quotient, avant que ce cas particulier se soit présenté, ne peut être trop petit, puisqu'on a constamment employé des diviseurs trop petits.

CHAPITRE IX

DES ERREURS RELATIVES

***341.** L'*erreur relative* d'une quantité, approchée par excès ou par défaut, est le rapport de l'erreur absolue de cette quantité à la quantité exacte dont elle est une valeur approchée.

Ainsi l'erreur relative du nombre **960** ou **954**, considéré comme une valeur approchée de 957, est $\frac{3}{957}$ ou $\frac{1}{319}$.

***342.** *L'erreur relative de la valeur approchée d'un nombre entier ou décimal, sur la droite duquel on supprime un ou plusieurs chiffres, en augmentant ou non d'une unité le dernier chiffre conservé, et en remplaçant par des zéros les chiffres supprimés à gauche du point décimal, est moindre que l'unité divisée par le nombre entier formé par les chiffres conservés.*

Ainsi l'erreur relative du nombre **31·41** ou **31·42** substitué au nombre 31·4159 est moindre que $\frac{1}{3141}$. Car l'erreur absolue du nombre 31·41 ou 31·42 est moindre que 1 centième (**332**), tandis que le nombre exact excède 3141 centièmes; donc l'erreur relative de 31·41 ou 31·42 est moindre que 1 centième divisé par 3141 centièmes, ou que $\frac{1}{3141}$.

Lorsque l'erreur absolue n'excède pas une demi-unité du dernier ordre conservé, l'erreur relative est moindre que l'unité divisée par le double du nombre entier formé par les chiffres conservés.

Ainsi l'erreur relative du nombre **31·42** substitué au nombre 31·4159 est moindre que $\frac{1}{2}$ centième divisé par 3141 centièmes, ou que $\frac{1}{2\times3141}$.

***343.** *Lorsqu'un nombre entier ou décimal est approché par excès, avec une erreur relative moindre qu'une fraction ayant pour numérateur l'unité et pour dénominateur un nombre entier, si l'on conserve, sur la gauche de cette valeur approchée, un nombre de chiffres tel que le nombre entier formé par ces chiffres soit moindre que le dénominateur de la fraction, l'erreur absolue sera moindre qu'une unité du dernier ordre conservé.*

Ainsi, en supposant que **3·1416** soit une valeur approchée par excès

avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{3142}$, le nombre 3141 sera une valeur approchée du nombre exact avec une erreur absolue moindre que 0·001. Car, l'erreur relative de 3·1416 étant moindre que $\frac{1}{3142}$, l'erreur absolue est moindre que la 3142e partie du nombre exact, et, à plus forte raison, moindre que la 3142e partie de 3·1416, laquelle est moindre que $\frac{3·142}{3142}$ ou que 0·001.

***344**. Le même principe est applicable à une valeur approchée par défaut, *lorsque le dénominateur de la fraction plus grande que l'erreur relative excède de plus d'une unité le nombre entier formé par les chiffres conservés, et que l'on augmente d'une unité le dernier de ces chiffres.*

Ainsi, en supposant que **29·8765** soit une valeur approchée par défaut avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{300}$, le nombre 29·9 sera une valeur approchée du nombre exact avec une erreur absolue moindre que 0·1 (*). Car, l'erreur relative de 29·8765 étant moindre que $\frac{1}{300}$, son erreur absolue est moindre que la 300e partie du nombre exact, et, par suite, 29·8765 excède les $\frac{299}{300}$ du nombre exact; donc $\frac{1}{300}$ du nombre exact et, à plus forte raison, l'erreur absolue de 29·8765 est moindre que $\frac{29·8765}{299}$, nombre plus petit que $\frac{29·9}{299}$ ou que 0·1. De plus, quand on remplace 29·8765 par 29·9, on commet, en sens contraire, une nouvelle erreur absolue moindre que 0·1; donc l'erreur absolue définitive est moindre que 0·1.

***345.** *L'erreur absolue d'un produit de deux facteurs, l'un exact et l'autre approché, est égale au facteur exact multiplié par l'erreur absolue de l'autre facteur; et l'erreur relative du même produit est égale à celle du facteur approché.*

Considérons le produit AB dans lequel on remplace le facteur A par sa valeur approchée $A + \alpha$ ou $A - \alpha$. En multipliant le facteur approché $A + \alpha$ ou $A - \alpha$ par le facteur exact B, on obtient le produit approché $AB + \alpha B$ ou $AB - \alpha B$, dont l'erreur absolue est αB.

Pour obtenir l'erreur relative du produit, on divise l'erreur absolue

---

(*) Dans cet exemple, le dénominateur de la fraction $\frac{1}{300}$ plus grande que l'erreur relative excède de 2 unités le nombre entier 298, formé par les chiffres conservés.

αB par le produit exact AB, ce qui donne $\frac{\alpha}{A}$, ou l'erreur relative du facteur approché.

Plus généralement, *l'erreur relative d'un produit de plusieurs facteurs, dont un seul est approché, est égale à l'erreur relative de ce facteur.*

***346.** *L'erreur relative d'un produit de deux facteurs approchés est égale à la somme ou à la différence des erreurs relatives des deux facteurs, plus ou moins le produit de ces mêmes erreurs.*

Considérons le produit AB dans lequel on remplace les facteurs A et B par leurs valeurs approchées par excès ou par défaut $A + \alpha$ ou $A - \alpha$, $B + \beta$ ou $B - \beta$.

Si l'on remplace A et B par leurs valeurs approchées par excès $A + \alpha$ et $B + \beta$, on a le produit approché $AB + \alpha B + \beta A + \alpha\beta$, dont l'erreur absolue est $\alpha B + \beta A + \alpha\beta$. Divisant cette erreur par le produit exact AB, on trouve que l'erreur relative du produit est

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} + \frac{\alpha}{A} \cdot \frac{\beta}{B},$$

c'est-à-dire la somme des erreurs relatives des facteurs approchés, augmentée du produit de ces mêmes erreurs.

Si l'on remplace A et B par leurs valeurs approchées par défaut $A - \alpha$ et $B - \beta$, on trouve, pour erreur relative du produit approché,

$$\frac{\alpha}{A} + \frac{\beta}{B} - \frac{\alpha}{A} \cdot \frac{\beta}{B},$$

c'est-à-dire la somme des erreurs relatives des facteurs approchés, diminuée du produit de ces mêmes erreurs.

Enfin, si l'on remplace A par $A + \alpha$ et B par $B - \beta$, on trouve l'erreur relative

$$\frac{\alpha}{A} - \frac{\beta}{B} - \frac{\alpha}{A} \cdot \frac{\beta}{B},$$

c'est-à-dire la différence des erreurs relatives des facteurs approchés, diminuée du produit de ces mêmes erreurs.

***347** *Lorsque les erreurs relatives de deux quantites sont de très petites fractions*, leur produit est lui-même très petit par rapport à chacune d'elles, ce qui permet de ne pas en tenir compte dans les applications. La proposition qui précède peut alors s'énoncer de la manière suivante :

L'erreur relative d'un produit de deux facteurs approchés, dans le même sens ou en sens contraires, est sensiblement égale à la somme ou à la différence des erreurs relatives des deux facteurs.

Plus généralement, *l'erreur relative d'un produit de plusieurs facteurs, approchés dans le même sens, est sensiblement égale à la somme des erreurs relatives de tous les facteurs.*

On déduit de là que *l'erreur relative d'une puissance d'un nombre approché est sensiblement égale à l'erreur relative de ce nombre, multiplié par le degré de la puissance.*

Réciproquement, *l'erreur relative de la racine d'un nombre approché est sensiblement égale à l'erreur relative de ce nombre, divisée par le degré de la racine.*

***348.** *L'erreur absolue du quotient d'un nombre approché par un nombre exact est égale à l'erreur absolue du dividende divisée par le diviseur, et l'erreur relative du même quotient est égale à celle du dividende.*

Considérons le quotient $\frac{A}{B}$ dans lequel on remplace le dividende A par sa valeur approchée $A + \alpha$ ou $A - \alpha$. En divisant le dividende approché $A + \alpha$ ou $A - \alpha$ par le diviseur exact B, on obtient le quotient approché $\frac{A}{B} + \frac{\alpha}{B}$ ou $\frac{A}{B} - \frac{\alpha}{B}$, dont l'erreur absolue est $\frac{\alpha}{B}$, c'est-à-dire l'erreur absolue du dividende divisée par le diviseur.

Pour obtenir l'erreur relative du quotient, on divise l'erreur absolue $\frac{\alpha}{B}$ par le quotient exact $\frac{A}{B}$, ce qui donne $\frac{\alpha}{A}$, ou l'erreur relative du dividende.

***349.** *L'erreur relative du quotient de deux nombres approchés est ›nsiblement égale à la somme ou à la différence des erreurs relatives de ›s deux nombres.*

En effet, le dividende étant égal au produit du diviseur par le quotient, ›rreur relative du dividende est sensiblement égale à la somme ou à la fférence des erreurs relatives du diviseur et du quotient, suivant qu'ils ›nt approchés dans le même sens ou en sens contraires (**347**); donc ›rreur relative du quotient est sensiblement égale à la somme ou à la ifférence des erreurs relatives du dividende et du diviseur, suivant qu'ils ›nt approchés en sens contraires ou dans le même sens.

CHAPITRE X

PROBLÈMES SUR LES APPROXIMATIONS NUMÉRIQUES

Produit de deux facteurs.

***350.** Problème I. *Trouver une valeur approchée du produit*

$$31{\cdot}415\,927\,535 \times 0{\cdot}014\,142\,135,$$

vec une erreur absolue ou relative moindre que 0·001.

1° En écrivant le multiplicateur de manière que le chiffre 0 de ses nités simples soit au-dessous du chiffre 2 qui exprime des centillièmes au multiplicande, et en observant la règle d'Oughtred (**335**), n trouve **0·444** pour le produit demandé.

2° Le produit exact étant plus grand que 31 × 0·01 ou que 0·31, our en obtenir une valeur approchée avec une erreur relative moindre ue $\frac{1}{1000}$, il suffit d'en calculer une valeur approchée avec une erreur bsolue moindre que 0·0001 (**342**). La règle d'Oughtred donne **0·4443**.

***351.** Problème II. *Sur combien de chiffres peut-on compter dans le roduit* 3·141... × 27·18... *de deux facteurs dont les chiffres donnés ›nt exacts?*

Les erreurs relatives des deux facteurs approchés étant respectivement

moindres que $\frac{1}{3141}$ et $\frac{1}{2718}$ (**342**), l'erreur relative de leur produit est moindre que la somme de ces fractions (**347**), et, à plus forte raison, que le double de la plus grande, ou que $\frac{1}{1359}$. De plus, l'excès de 1359 sur le nombre entier formé par les trois premiers chiffres du produit approché est plus grand que l'unité; donc on pourra compter sur les trois premiers chiffres à gauche de ce produit (**344**), ce qui donne définitivement **85'4**.

***352.** Problème III. *Combien suffit-il de calculer de chiffres dans les facteurs* 3'... *et* 0'6..., *dont les chiffres donnés sont exacts, pour obtenir leur produit avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0'001 ?

1° Le produit exact étant moindre que 4 × 0'7 ou que 2'8, pour en obtenir une valeur approchée à moins de 0'001, il suffit d'en calculer une valeur approchée avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{2801}$ (**344**) et, par suite, que l'erreur relative de chaque facteur soit moindre que $\frac{1}{2801} \times \frac{1}{2}$ ou que $\frac{1}{5602}$ (**347**); donc il suffira de calculer quatre chiffres de plus dans le premier facteur et trois dans le second (**342**).

2° Pour que l'erreur relative du produit soit moindre que $\frac{1}{1000}$, il suffit que l'erreur relative de chaque facteur soit moindre que $\frac{1}{2000}$; donc il suffira de calculer deux chiffres de plus dans chaque facteur (**342**).

Produit de trois facteurs.

***353** Problème IV. *Trouver une valeur approchée du produit*

3'141 592 × 0'693 147 × 9'869 607,

avec une erreur absolue ou relative moindre que 0'1.

1° Le produit exact étant moindre que 4 × 0'7 × 10 ou que 28, pour en obtenir une valeur approchée à moins de 0'1, il suffit d'en calculer une valeur approchée avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{281}$ (**344**), et par suite, de prendre chaque facteur approché avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{281} \times \frac{1}{3}$ ou que $\frac{1}{843}$ (**347**); ce qui donne le produit approché 3'141 × 0'6931 × 9'86, dont les trois premiers chiffres forment le nombre 21'4, qui ,augmenté de 0'1, donne le nombre demandé **2'15** (**344**).

2° Pour que l'erreur relative du produit approché soit moindre que $\frac{1}{10}$, il suffit que l'erreur relative de chaque facteur soit moindre que $\frac{1}{30}$ (**347**)

ce qui donne le produit approché 3'1 × 0'69 × 9'8, dont les deux premiers chiffres forment le nombre 20, qui, augmenté d'une unité, donne le nombre demandé **21** (**344**).

*354. Problème V. *Sur combien de chiffres peut-on compter dans le produit* 3'14... × 0'693... × 9'86... *de trois facteurs dont les chiffres donnés sont exacts ?*

Les erreurs relatives des trois facteurs approchés étant respectivement moindres que $\frac{1}{314}$, $\frac{1}{693}$, $\frac{1}{986}$ (**342**), l'erreur relative de leur produit est moindre que la somme de ces fractions (**347**), et, à plus forte raison, moindre que le triple de la plus grande ou que $\frac{1}{104}$; donc on pourra compter sur les deux premiers chiffres à gauche de ce produit (**344**), ce qui donne définitivement **22**.

*355. Problème VI. *Combien suffit-il de calculer de chiffres dans les facteurs* 3'..., 0'6..., 9'..., *dont les chiffres donnés sont exacts, pour obtenir leur produit avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0'01 ?

1° Le produit exact étant moindre que 4 × 0'7 × 10 ou que 28, pour en obtenir une valeur approchée à moins de 0'01, il suffit d'en calculer une valeur approchée avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{2801}$ (**344**), et, par suite, que l'erreur relative de chaque facteur soit moindre que $\frac{1}{2801} \times \frac{1}{3}$ ou que $\frac{1}{8403}$ (**347**); donc il suffira de calculer quatre chiffres de plus dans les deux premiers facteurs et trois dans le troisième (**342**).

2° Pour que l'erreur relative du produit soit moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit que l'erreur relative de chaque facteur soit moindre que $\frac{1}{300}$; donc il suffira de calculer deux chiffres de plus dans chaque facteur (**342**).

Division.

*356. Problème VII. *Trouver le quotient de* 3'141592 *par* 0'069314712, *avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0'01.

1° Le premier chiffre à gauche du quotient exact devant exprimer des dizaines (**339**), tandis que le dernier du quotient approché doit exprimer des centièmes, on voit qu'il suffit de calculer les quatre premiers chiffres

de ce quotient. On prendra donc 69314 pour premier diviseur, 314159 pour premier dividende, et, en observant la règle de la division abrégée (**339**), on trouvera **45°32**.

2° Pour que l'erreur relative du quotient approché soit moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit de calculer, par la règle de la division abrégée, les trois premiers chiffres du quotient exact. On prendra donc 6931 pour premier diviseur, 31415 pour premier dividende, et on trouvera le quotient **45°3**.

***357**. Problème VIII. *Sur combien de chiffres peut-on compter dans le quotient approché des deux nombres* 3°141..., 0°2718..., *dont les chiffres donnés sont exacts?*

Si l'on prend pour valeurs approchées des deux nombres exacts les deux nombres 3°141 et 0°2719, les erreurs relatives du dividende et du diviseur seront moindres que $\frac{1}{3141}$ et $\frac{1}{2718}$ (**342**); donc l'erreur relative du quotient approché par défaut de 3°141 par 0°2719 est sensiblement égale à la somme de ces fractions (**349**), et, par suite, moindre que le double de la plus grande, ou que $\frac{1}{1359}$. Or, en divisant 3°141 par 0°2719, on trouve le quotient 11°55...; donc, en augmentant ce nombre de 0°01, on pourra compter sur les quatre chiffres du quotient approché **11°56** (**344**).

***358**. Problème IX. *Combien suffit-il de calculer de chiffres dans les nombres* 3°... *et* 0°06..., *dont les chiffres donnés sont exacts, pour obtenir leur quotient avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0°1?

1° Le premier chiffre à gauche du quotient exact devant exprimer des dizaines, tandis que le dernier du quotient approché doit exprimer des dixièmes, on voit qu'il suffit de calculer les trois premiers chiffres de ce quotient, ou, ce qui revient au même, de calculer ce quotient avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{1000}$. Cette condition sera remplie en prenant des valeurs approchées du dividende et du diviseur avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{2000}$, ce qui exige l'emploi des quatre premiers chiffres de chacun de ces nombres. Il suffira donc de calculer trois chiffres nouveaux dans chacun des nombres proposés.

2° Pour obtenir le quotient avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{1}$

il suffit d'employer des valeurs du dividende et du diviseur approchées avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{20}$, c'est-à-dire d'employer les deux premiers chiffres de chacun de ces nombres. Il suffira donc de calculer un chiffre de plus dans chacun des nombres proposés.

Carrés.

***359.** Problème X. *Trouver le carré du nombre* 3'1415926, *avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0'01.

1° En écrivant le nombre proposé au-dessous de lui-même, de manière que le chiffre 3 des unités simples du multiplicateur corresponde au chiffre 5 des dix-millièmes du multiplicande, et en observant la règle d'Oughtred, on trouvera le produit approché **9'87**.

2° Pour que l'erreur relative du carré demandé soit moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit que l'erreur relative du nombre approché soit moindre que $\frac{1}{200}$. On élèvera donc 3'14 au carré, ce qui donne 9'8596, et on aura définitivement 9'85 + 0'01 ou **9'86** pour le carré demandé.

***360.** Problème XI. *Sur combien de chiffres peut-on compter dans le carré du nombre approché* 3'214..., *dont les chiffres donnés sont exacts?*

L'erreur relative de 3'214 étant moindre que $\frac{1}{3214}$, celle de son carré 10'329796 est moindre que $\frac{2}{3214}$ ou que $\frac{1}{1607}$; donc on pourra compter sur les quatre premiers chiffres de ce carré (**344**), en prenant 10'32 + 0'01 ou **10'33** pour sa valeur approchée.

***361.** Problème XII. *Combien suffit-il de calculer de chiffres dans le nombre* 3'8..., *dont les chiffres donnés sont exacts, pour obtenir son carré avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0'01?

1° Le carré approché par défaut devant être moindre que le carré 15'21 de 3'9, pour que son erreur absolue soit moindre que 0'01, il suffit que son erreur relative soit moindre que $\frac{1}{1522}$ (**344**), et, par suite, que l'erreur relative du nombre proposé 3'8... soit moindre que $\frac{1}{1522} \times \frac{1}{2}$ ou que $\frac{1}{3044}$; donc il suffira d'employer les quatre premiers chiffres de ce nombre, et, par suite, de calculer deux chiffres de plus.

2° Pour que le carré de 3'8... soit approché avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit que l'erreur relative de 3'8... soit moindre que $\frac{1}{200}$; donc il suffira d'employer les trois premiers chiffres de ce nombre, et, par suite, de calculer un chiffre de plus.

Cubes.

***362.** Problème XIII. *Trouver le cube du nombre* 3'1415926, *avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0'1.

1° Le premier chiffre du cube approché devant exprimer des dizaines, tandis que le dernier doit exprimer des dixièmes, pour obtenir ce cube avec une erreur absolue moindre que 0'1, il suffit d'en calculer les trois premiers chiffres ou une valeur approchée avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{1000}$; donc il suffira d'employer une valeur approchée du nombre proposé avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{3000}$ (**347**), et, par suite, d'employer 3'141 dont le cube est **31**, en ne conservant que les trois premiers chiffres et en augmentant le dernier d'une unité.

2° Pour que l'erreur relative du cube demandé soit moindre que $\frac{1}{10}$, il suffit que l'erreur relative du nombre approché soit moindre que $\frac{1}{30}$. On élèvera donc 3'1 au cube, ce qui donne 29'791, et on aura définitivement 29 + 1 ou **30** pour le cube demandé.

***363.** Problème XIV. *Sur combien de chiffres peut-on compter dans le cube du nombre approché* 3'141..., *dont les chiffres donnés sont exacts?*

L'erreur relative de 3'141 étant moindre que $\frac{1}{3141}$, celle de son cube 30'988732221 est moindre que $\frac{3}{3141}$ ou que $\frac{1}{1047}$; donc on pourra compter sur les trois premiers chiffres de ce cube (**344**), en prenant 30'9 + 0'1 ou **31** pour sa valeur approchée.

***364.** Problème XV. *Combien suffit-il de calculer de chiffres dans le nombre* 3'1..., *dont les chiffres donnés sont exacts, pour obtenir son cube avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0'01?

1° Le cube approché par défaut devant être moindre que le cube 32'768 de 3'2, pour que son erreur absolue soit moindre que 0'01, il suffit que

son erreur relative soit moindre que $\frac{1}{3278}$ (**344**), et, par suite, que l'erreur relative du nombre proposé 3·1... soit moindre que $\frac{1}{3278} \times \frac{1}{3}$ ou que $\frac{1}{9834}$; donc il suffira d'employer les cinq premiers chiffres de ce nombre, et, par suite, de calculer trois chiffres de plus.

2° Pour que le cube de 3·1... soit approché avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit que l'erreur relative de 3·1... soit moindre que $\frac{1}{300}$; donc il suffira d'employer les trois premiers chiffres de ce nombre, et, par suite, de calculer un chiffre de plus.

Racines carrées.

***365.** Problème XVI. *Trouver la racine carrée du nombre* 0·0314159 26, *avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0·01.

1° On conserve deux fois autant de chiffres décimaux qu'on veut en avoir à la racine, ce qui donne le nombre 0·0314 dont on extrait la racine carrée à moins d'une unité, en faisant abstraction du point décimal; et on obtient ainsi le nombre 17, sur la droite duquel on sépare deux décimales, ce qui donne la racine demandée **0·17**.

2° L'erreur relative de la racine approchée devant être moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit de calculer les trois premiers chiffres de cette racine, ce qui donne **0·177**.

***366.** Problème XVII. *Sur combien de chiffres peut-on compter dans la racine carrée du nombre approché* 31·41..., *dont les chiffres donnés sont exacts?*

L'erreur relative du nombre 31·42 approché par excès étant moindre que $\frac{1}{3141}$ (**342**), l'erreur relative de la racine carrée de 31·42 est moindre que $\frac{1}{3141} \times \frac{1}{2}$ ou que $\frac{1}{6282}$ (**344**). Or le premier chiffre de cette racine est un 5; donc on pourra compter sur les quatre premiers chiffres, et on aura **5·605** pour la racine du nombre exact, avec une erreur absolue moindre que 0·001.

***367.** Problème XVIII. *Combien suffit-il de calculer de chiffres dans le nombre* 7·6..., *dont les chiffres donnés sont exacts, pour obtenir sa racine carrée avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0·001?

1° Pour que l'erreur absolue de la racine approchée, commençant par le chiffre 2, soit moindre que 0·001, il suffit d'en calculer les quatre premiers chiffres, ou, ce qui revient au même, une valeur approchée avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{3000}$, ce qui exige seulement que l'erreur relative du nombre proposé soit moindre que $\frac{2}{3000}$ ou $\frac{1}{1500}$; donc il suffira de connaître les quatre premiers chiffres du nombre 7·6..., et, par suite, de calculer deux chiffres de plus.

2° Pour que l'erreur relative de la racine carrée approchée soit moindre que $\frac{1}{1000}$, il suffit que celle du nombre 7·6... soit moindre que $\frac{2}{1000}$ ou $\frac{1}{500}$, ce qui exige que l'on connaisse seulement ses trois premiers chiffres; donc il suffira de calculer un chiffre de plus.

Racines cubiques.

***368.** Problème XIX. *Trouver la racine cubique du nombre* 0·031 415 926, *avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0·01.

1° On conserve trois fois autant de chiffres décimaux qu'on veut en avoir à la racine, ce qui donne le nombre 0·031 415 dont on extrait la racine cubique à moins d'une unité, en faisant abstraction du point décimal; et on obtient ainsi le nombre 31, sur la droite duquel on sépare deux décimales, ce qui donne la racine demandée **0·31**.

2° L'erreur relative de la racine approchée devant être moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit de calculer les trois premiers chiffres de cette racine, ce qui donne **0·315**.

***369.** Problème XX. *Sur combien de chiffres peut-on compter dans la racine cubique du nombre approché* 31·4..., *dont les chiffres donnés sont exacts?*

L'erreur relative du nombre 31·5 approché par excès étant moindre que $\frac{1}{314}$ (**342**), l'erreur relative de la racine cubique de 31·5 est moindre que $\frac{1}{314} \times \frac{1}{3}$ ou que $\frac{1}{942}$ (**344**). Or le premier chiffre de cette racine est un 3 : donc on pourra compter sur les trois premiers chiffres, et on aura **3·15** pour la racine du nombre exact, avec une erreur absolue moindre que 0·01.

*370. Problème XXI. *Combien suffit-il de calculer de chiffres dans le nombre* 0·6..., *dont les chiffres donnés sont exacts, pour obtenir sa racine cubique avec une erreur absolue ou relative moindre que* 0·01 ?

1° Pour que l'erreur absolue de la racine approchée, commençant par le chiffre 8, soit moindre que 0·01, il suffit d'en calculer les deux premiers chiffres, ou, ce qui revient au même, une valeur approchée avec une erreur relative moindre que $\frac{1}{90}$, ce qui exige seulement que l'erreur relative du nombre proposé soit moindre que $\frac{3}{90}$ ou $\frac{1}{30}$; donc il suffit de connaître les deux premiers chiffres du nombre 0·6..., et, par suite, de calculer un chiffre de plus.

2° Pour que l'erreur relative de la racine cubique approchée soit moindre que $\frac{1}{100}$, il suffit que celle du nombre 0·6... soit moindre que $\frac{3}{100}$ ou $\frac{1}{34}$, ce qui exige que l'on connaisse seulement ses deux premiers chiffres; donc il suffira de calculer un chiffre de plus.

LIVRE CINQUIÈME

LES RAPPORTS ET LES PROPORTIONS

—

CHAPITRE I

DES RAPPORTS

371. On appelle *rapport* d'un nombre à un autre *le nombre qui indique combien de fois le premier contient le second et combien de parties du second.*

Ainsi le rapport de 25 à 7 est $3\frac{4}{7}$, parce que 25 est égal à 3 fois 7 plus aux $\frac{4}{7}$ de 7; de même, le rapport de $\frac{4}{9}$ à $\frac{1}{36}$ est 16, parce que $\frac{4}{9}$ est égal à 16 fois $\frac{1}{36}$.

Le rapport ainsi défini n'existe qu'entre deux nombres de même espèce.

Plus généralement, on appelle *rapport* d'un nombre à un autre *le quotient de la division du premier nombre par le second.*

Le rapport ainsi défini se confond avec la *fraction*, prise dans son sens le plus général (**261**).

Pour indiquer le rapport de deux nombres, on emploie indifféremment le signe de la division ou la notation des fractions.

Ainsi, pour indiquer le rapport de 25 à 7, ou de $\frac{4}{9}$ à $\frac{1}{36}$, on écrit indifféremment :

$$25 : 7 \quad \text{ou} \quad \frac{25}{7}, \qquad \frac{4}{9} : \frac{1}{36} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{4}{9}}{\frac{1}{36}}.$$

Le dividende ou numérateur est appelé le *premier terme* ou l'*antécédent* du rapport, et le diviseur ou dénominateur est appelé le *second terme* ou le *conséquent* du rapport.

Il suit de la définition que les rapports jouissent des mêmes propriétés que les fractions en général (**262**).

En particulier, *lorsqu'on multiplie ou qu'on divise les deux termes d'un rapport par un même nombre, le rapport ne change pas de valeur.*

Deux rapports sont *inverses* ou *réciproques* l'un de l'autre, lorsque leur produit est égal à l'unité, ou, si l'on veut, lorsque l'antécédent de l'un est le conséquent de l'autre, et réciproquement (**250**).

Ainsi les rapports $\frac{25}{7}$ et $\frac{7}{25}$ sont inverses l'un de l'autre.

CHAPITRE II

DES PROPORTIONS

372. On dit que *quatre nombres sont en proportion*, lorsque le rapport du premier au deuxième est égal au rapport du troisième au quatrième.

Une *proportion* est l'*égalité entre deux rapports.*

Le rapport de 18 à 12, par exemple, étant égal à celui de 24 à 16, les quatre nombres 18, 12, 24, 16 forment une proportion.

Cette proportion s'écrit :

$$18 : 12 = 24 : 16, \quad \text{ou} \quad \frac{18}{12} = \frac{24}{16},$$

et elle s'énonce :

18 *est à* 12 *comme* 24 *est à* 16, ou 18 *sur* 12 *égale* 24 *sur* 16.

Les nombres 18, 12, 24, 16 sont appelés respectivement le *premier*, le *deuxième*, le *troisième* et le *quatrième terme* de la proportion ; les nombres 18 et 24 sont les *antécédents;* 12 et 16 sont les *conséquents;* 18 et 16, les *extrêmes;* 12 et 24, les *moyens.*

On dit aussi que les nombres 18 et 24 sont respectivement *proportionnels* aux nombres 12 et 16.

Il est évident qu'*on peut multiplier ou diviser par un même nombre les deux premiers termes d'une proportion, ou les deux derniers, ou les deux antécédents, ou les deux conséquents, ou les quatre termes.*

Une proportion est appelée *continue* lorsque les termes moyens sont égaux.

Telle est la proportion $\frac{18}{12} = \frac{12}{8}$.

On appelle *quatrième proportionnelle à trois nombres* le quatrième terme d'une proportion dont ces nombres sont les trois premiers termes.

Ainsi, dans la proportion $\frac{18}{12} = \frac{24}{16}$, le nombre 16 est la quatrième proportionnelle aux trois nombres 18, 12, 24.

On appelle *troisième proportionnelle à deux nombres* le quatrième terme d'une proportion continue qui a pour premier terme le premier nombre et pour termes moyens le second nombre.

Ainsi, dans la proportion $\frac{18}{12} = \frac{12}{8}$, le nombre 8 est la troisième proportionnelle aux deux nombres 18 et 12.

On appelle *moyenne proportionnelle* ou *géométrique entre deux nombres* le terme moyen d'une proportion continue dont ces deux nombres sont les termes extrêmes.

Ainsi, dans la proportion $\frac{18}{12} = \frac{12}{8}$, le nombre 12 est la moyenne proportionnelle ou géométrique entre les deux nombres 18 et 8.

373. Théorème I. *Dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.*

Soient a, b, c, d les quatre termes d'une proportion quelconque, en sorte que l'on ait

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Si l'on multiplie les deux termes du premier rapport par d, et les deux termes du second par b, on ne changera pas la valeur de ces rapports (**371**), et il viendra

$$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}.$$

Ces deux rapports égaux ayant le même dénominateur (**42**), leurs numérateurs sont égaux, et on a

$$a \times d = c \times b,$$

ce qu'il fallait démontrer.

374. Théorème II. Réciproquement, *si quatre nombres sont tels que le produit de deux d'entre eux soit égal au produit des deux autres, ces quatre nombres forment une proportion, dans laquelle les extrêmes ou les moyens sont les deux premiers nombres ou les deux derniers.*

Soit l'égalité

$$a \times d = b \times c, \qquad \text{ou} \qquad b \times c = a \times d.$$

Si l'on divise ces produits égaux par $b \times d$, ou par $c \times d$, ou par $a \times b$, ou par $a \times c$, on aura, en supprimant les facteurs communs aux deux termes des rapports ainsi obtenus, les proportions

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$
$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}, \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}, \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

ce qui démontre l'énoncé.

375. Théorème III. *Dans toute proportion, on peut : 1° échanger un moyen avec l'autre; 2° échanger un extrême avec l'autre; 3° mettre les moyens à la place des extrêmes, et réciproquement.*

En effet, d'après le premier théorème, les huit proportions

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a},$$
$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b}, \quad \frac{b}{d} = \frac{a}{c}, \quad \frac{c}{a} = \frac{d}{b}, \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

conduisent toutes à l'égalité $a \times d = b \times c$; et, réciproquement, d'après le deuxième théorème, elles se déduisent toutes de la même égalité. Donc ces huit proportions sont équivalentes, ce qui démontre l'énoncé

376. Théorème IV. *Dans toute proportion, la somme ou la différence des deux premiers termes est au premier ou au deuxième, comme la somme ou la différence des deux derniers est au troisième ou au quatrième* (*).

Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, dans laquelle nous supposons a plus grand que b : je dis que l'on a

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

En effet, la proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

devient, en augmentant ou en diminuant chaque rapport de 1,

$$\frac{a}{b} \pm 1 = \frac{c}{d} \pm 1,$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

De même, si l'on écrit (**375**) la proportion $a : b = c : d$ sous la forme

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$

puis qu'on augmente ou qu'on diminue 1 de chaque rapport, on a

$$1 \pm \frac{b}{a} = 1 \pm \frac{d}{c},$$

ou, en réduisant au même dénominateur,

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}.$$

377. Théorème V. *Dans toute proportion, la somme ou la différence des deux premiers termes est à la somme ou à la différence des deux derniers, comme le premier terme est au troisième, ou le deuxième au quatrième.*

(*) Autrement dit : 1° *à chaque antécédent on peut ajouter le conséquent,* ou *de chaque antécédent on peut soustraire le conséquent;* 2° *à chaque conséquent on peut ajouter l'antécédent,* ou *de chaque conséquent on peut soustraire l'antécédent.*

Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

On a, d'après le théorème précédent,

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}, \quad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d},$$

d'où, en échangeant les moyens entre eux,

$$\frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c}, \quad \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{b}{d},$$

ce qui démontre le théorème.

378. Théorème VI. *Dans toute proportion, la somme des deux premiers termes est à la somme des deux derniers, comme la différence des deux premiers est à la différence des deux derniers.*

Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

On a, d'après le théorème précédent,

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{a}{c}, \quad \frac{a - b}{c - d} = \frac{a}{c}.$$

Mais deux rapports égaux à un troisième sont égaux entre eux (*) : donc

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d}.$$

379. Théorème VII. *Dans toute proportion, la somme des deux premiers termes est à leur différence comme la somme des deux derniers est à leur différence.*

Soit la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

On a, d'après le théorème précédent,

$$\frac{a + b}{c + d} = \frac{a - b}{c - d},$$

(*) Autrement dit, *quand deux proportions ont un rapport commun, les deux autres rapports forment une proportion.*

d'où, en échangeant les moyens entre eux,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d},$$

ce qui démontre le théorème.

380. Théorème VIII. Réciproquement, *si la somme de deux nombres est à leur différence comme la somme de deux autres nombres est à leur différence, le rapport des deux premiers nombres est égal au rapport des deux autres.*

Soit la proportion

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

On a, en appliquant le théorème précédent,

$$\frac{(a+b)+(a-b)}{(a+b)-(a-b)} = \frac{(c+d)+(c-d)}{(c+d)-(c-d)},$$

ou (**35**)

$$\frac{a+b+a-b}{a+b-a+b} = \frac{c+d+c-d}{c+d-c+d},$$

ou

$$\frac{2a}{2b} = \frac{2c}{2d},$$

ou, enfin,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

ce qu'il fallait démontrer.

381. Si l'on échange entre eux les termes moyens de la proportion $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, puis qu'on applique les théorèmes IV, V, VI, VII à la proportion ainsi obtenue $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, on a

$$\frac{a \pm c}{a \text{ ou } c} = \frac{b \pm d}{b \text{ ou } d}, \qquad \frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}, \qquad \frac{a+c}{a-c} = \frac{b+d}{b-d}.$$

Ainsi :

1° *Dans toute proportion, la somme ou la différence des deux antécédents est au premier terme ou au troisième, comme la somme ou la différence des deux conséquents est au deuxième terme ou au quatrième;*

2° *Dans toute proportion, la somme ou la différence des deux antécédents est à la somme ou à la différence des deux conséquents comme un antécédent quelconque est à son conséquent;*

3° *Dans toute proportion, la somme des deux antécédents est à la somme des deux conséquents comme la différence des deux antécédents est à la différence des deux conséquents;*

4° *Dans toute proportion, la somme des deux antécédents est à leur différence comme la somme des deux conséquents est à leur différence.*

382. Les proportions jouissent de plusieurs autres propriétés, parmi lesquelles nous citerons les suivantes :

1° *Quand on multiplie plusieurs proportions terme à terme, les produits sont en proportion;*

2° *Quand on divise deux proportions terme à terme, les quotients sont en proportion;*

3° *Si quatre nombres sont en proportion, leurs puissances ou leurs racines de même degré sont en proportion.*

383. Problème. *Trouver l'un des quatre termes d'une proportion, connaissant les trois autres, ou le terme moyen d'une proportion continue, connaissant les termes extrêmes.*

On a vu que, *dans toute proportion, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens* (**373**). En particulier, *dans une proportion continue, le carré du terme moyen est égal au produit des termes extrêmes.*

On déduit de là les règles suivantes :

1° *Pour obtenir un terme extrême, on divise le produit des moyens par l'autre extrême;*

2° *Pour obtenir un terme moyen, on divise le produit des extrêmes par l'autre moyen;*

3° *Pour avoir le terme moyen d'une proportion continue, on extrait la racine carrée du produit des termes extrêmes;*

4° *Pour avoir la quatrième proportionnelle à trois nombres, on divise par le premier nombre le produit des deux autres;*

5° *Pour avoir la troisième proportionnelle à deux nombres, on divise par le premier nombre le carré du deuxième;*

6° *Pour avoir la moyenne proportionnelle entre deux nombres, on extrait la racine carrée du produit de ces nombres.*

CHAPITRE III

DES SUITES DE RAPPORTS ÉGAUX

384. Théorème I. *Lorsqu'on ajoute terme à terme plusieurs fractions égales, la fraction obtenue est égale à chacune des fractions proposées;* en d'autres termes, *dans toute suite de rapports égaux, la somme des antécédents est à la somme des conséquents comme un antécédent quelconque est à son conséquent.*

Soit la suite de rapports égaux

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}.$$

En appelant q la valeur commune de ces rapports, on a

$$\frac{a}{b} = q, \quad \frac{c}{d} = q, \quad \frac{e}{f} = q, \quad \frac{g}{h} = q,$$

d'où (**241**)

$$a = q \times b,$$
$$c = q \times d,$$
$$e = q \times f,$$
$$g = q \times h,$$

d'où, en ajoutant,

$$a + c + e + g = q \times (b + d + f + h),$$

puis, en divisant par $b + d + f + h$,

$$\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = q,$$

ou, enfin,

$$\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} \text{ (*)}.$$

*385. Théorème II. *Lorsqu'on ajoute terme à terme plusieurs fractions inégales, la fraction obtenue est comprise entre la plus grande et la plus petite des fractions données.*

Soient les fractions inégales $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}$, $\frac{g}{h}$, que nous supposons écrites par ordre de grandeur décroissante.

En désignant la plus grande $\frac{a}{b}$ de ces fractions par p et la plus petite $\frac{g}{h}$ par q, on a

$$p = \frac{a}{b} > q,$$

$$p > \frac{c}{d} > q,$$

$$p > \frac{e}{f} > q,$$

$$p > \frac{g}{h} = q,$$

d'où, en multipliant respectivement par b, d, f, h,

$$\begin{aligned} p \times b &= a > q \times b, \\ p \times d &> c > q \times d, \\ p \times f &> e > q \times f, \\ p \times h &> g = q \times h, \end{aligned}$$

d'où, en ajoutant,

$$p \times (b + d + f + h) > a + c + e + g > q \times (b + d + f + h),$$

d'où, en divisant par $b + d + f + h$,

$$p > \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} > q,$$

(*) *Lorsqu'on multiplie terme à terme* m *fractions égales, la fraction obtenue est égale à la* m^e *puissance de chacune des fractions proposées.*

ou, enfin,

$$\frac{a}{b} > \frac{a+c+e+g}{b+d+f+h} > \frac{g}{h}.$$

Ainsi la fraction $\frac{a+c+e+g}{b+d+f+h}$, obtenue en ajoutant terme à terme les fractions données, est comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{g}{h}$, c'est-à-dire entre la plus grande et la plus petite de ces fractions : c'est ce qu'il fallait démontrer.

386. Théorème III. *Dans toute suite de rapports égaux, on peut remplacer les antécédents ou les conséquents par des nombres qui leur sont respectivement proportionnels.*

Soient les deux suites de rapports égaux :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h},$$

$$\frac{a}{m} = \frac{c}{n} = \frac{e}{p} = \frac{g}{q}.$$

Si l'on divise membre à membre ces deux suites d'égalités, on a

$$\frac{a}{b} : \frac{a}{m} = \frac{c}{d} : \frac{c}{n} = \frac{e}{f} : \frac{e}{p} = \frac{g}{h} : \frac{g}{q},$$

ou

$$\frac{a \times m}{b \times a} = \frac{c \times n}{d \times c} = \frac{e \times p}{f \times e} = \frac{g \times q}{h \times g},$$

ou, en simplifiant,

$$\frac{m}{b} = \frac{n}{d} = \frac{p}{f} = \frac{q}{h}.$$

Or cette dernière suite d'égalités n'est autre que la première, dans laquelle on aurait remplacé les antécédents a, c, e, g, par les nombres m, n, p, q, qui leur sont respectivement proportionnels.

LIVRE SIXIÈME

LES PROGRESSIONS ET LES LOGARITHMES

—

CHAPITRE I

DES PROGRESSIONS PAR DIFFÉRENCE

387. Une *progression par différence* est une suite de nombres tels que chacun d'eux est égal au précédent augmenté ou diminué d'un nombre *constant*, appelé la *raison* de la progression.

Ainsi les deux suites de nombres

5,	8,	11,	14,	17,	20,	etc.,
25,	23,	21,	19,	17,	15,	etc.,

sont deux progressions par différence, l'une *croissante*, ayant pour raison 3, l'autre *décroissante*, ayant pour raison 2.

388. Problème I. *Trouver un terme de rang quelconque d'une progression par différence.*

Soit à trouver le douzième terme de la progression croissante par différence 80, 85, 90, 95, 100, etc.

Le second terme est égal au premier augmenté de la raison, ou à 80 *plus* 5; le troisième est égal au second augmenté de la raison, ou à 80 *plus* 2 *fois* 5; le quatrième est égal au troisième augmenté de la raison, ou à 80 *plus* 3 *fois* 5, et ainsi de suite jusqu'au douzième, qui est égal à 80 *plus* 11 *fois* 5, ou à **135.**

On trouverait, de même, que le douzième terme de la progression décroissante par différence 80, 75, 70, 65, 60, etc., est égal à 80 *moins* 11 *fois* 5, ou à **25.**

En général, *un terme de rang quelconque d'une progression par différence, croissante ou décroissante, est égal au premier, plus ou moins autant de fois la raison qu'il y a de termes qui précèdent.*

389. Problème II. *Insérer, entre* 17 *et* 65, *sept moyens différentiels;* c'est-à-dire trouver une progression par différence dont le premier terme soit 17, le dernier 65, et telle qu'entre 17 et 65 il y ait sept termes.

La progression cherchée se compose de neuf termes, dont le dernier, 65, est, d'après ce qu'on vient de voir (**388**), égal au premier, 17, plus 8 fois la raison. L'excès de 65 sur 17, ou 48, est donc égal à 8 fois la raison. Par suite, la raison est *la huitième partie de* 48, ou **6**.

La progression demandée est donc

17, 23, 29, 35, 41, 47, 53, 59, 65.

En général, *pour avoir la raison de la progression cherchée, on fait la différence des deux nombres donnés, et on divise cette différence par le nombre des moyens à insérer, augmenté d'une unité.*

390. Théorème. *Si l'on insère, entre les termes consécutifs d'une progression par différence, le même nombre de moyens différentiels, les progressions partielles obtenues forment une seule et même progression.*

Supposons que l'on insère trois moyens différentiels entre les termes consécutifs de la progression par différence 12, 28, 44, 60, etc. Les raisons des progressions partielles successives seront (**389**) :

$$\frac{28-12}{4},\quad \frac{44-28}{4},\quad \frac{60-44}{4},\quad \text{etc.}$$

Or les différences 28 — 12, 44 — 28, 60 — 44, etc., sont toutes égales à la raison 16 de la progression donnée. Par conséquent, les progressions partielles ont toutes pour raison *la quatrième partie de* 16, ou **4**. D'ailleurs, le dernier terme de chacune d'elles est le premier terme de la suivante. Donc toutes ces progressions ne forment qu'une seule et même progression.

391. Problème III. *Trouver la somme des termes d'une progression par différence.*

Soit la progression par différence

4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28.

Si l'on écrit cette progression au-dessous d'elle-même en ordre inverse :

4,	7,	10,	13,	16,	19,	22,	25,	28,
28,	25,	22,	19,	16,	13,	10,	7,	4,

on remarque que la somme des termes qui se correspondent dans les deux progressions est constante et égale à la somme 4 + 28 des deux premiers.

En effet, les termes 13 et 19, par exemple, sont respectivement égaux, l'un à 4, *plus* 3 *fois la raison*, l'autre à 28, *moins* 3 *fois la raison* (**388**) : leur somme est donc égale à 4 + 28.

Il suit de là que la somme des termes qui composent les deux progressions est égale à autant de fois 4 + 28 qu'il y a de termes dans chacune d'elles, ou à 9 fois 4 + 28. D'ailleurs, cette somme est double de celle des termes de la progression proposée, laquelle, par suite, égale

$$\frac{(4 + 28) \times 9}{2} = \mathbf{144}.$$

En général, *la somme des termes d'une progression par différence est égale à la moitié du produit de la somme des termes extrêmes par le nombre des termes* (*).

CHAPITRE II

DES PROGRESSIONS PAR QUOTIENT

392. Une *progression par quotient* est une suite de nombres tels que chacun d'eux est égal au précédent multiplié par un nombre *constant*, appelé la *raison* de la progression.

Ainsi les deux suites de nombres

4,	12,	36,	108,	324,	etc.,
12,	6,	3,	$1\frac{1}{2}$,	$\frac{3}{4}$,	etc.,

(*) Si l'on appelle a le premier terme d'une progression par différence, l le dernier, r la raison, n le nombre et s la somme des termes, on a

$$l = a \pm r(n - 1), \qquad s = \frac{(a + l)n}{2}.$$

sont deux progressions par quotient, l'une *croissante*, ayant pour raison 3, l'autre *decroissante*, ayant pour raison $\frac{1}{2}$.

393. Problème I. *Trouver un terme de rang quelconque d'une progression par quotient.*

Soit à trouver le douzième terme de la progression par quotient 7, 35, 175, 875, etc.

Le second terme est égal au premier multiplié par la raison, ou à 7×5; le troisième est égal au second multiplié par la raison, ou à 7×5^2; le quatrième est égal au troisième multiplié par la raison, ou à 7×5^3; et ainsi de suite jusqu'au douzième, qui est égal à 7×5^{11}, ou à **341 796 875**.

En général, *un terme de rang quelconque d'une progression par quotient est égal au premier, multiplié par la raison élevée à une puissance de degré égal au nombre de termes qui précèdent.*

394. Problème II. *Insérer, entre* 16 *et* 4096, *sept moyens proportionnels;* c'est-à-dire trouver une progression par quotient dont le premier terme soit 16, le dernier 4096, et telle qu'entre 16 et 4096 il y ait sept termes.

La progression cherchée se compose de neuf termes, dont le dernier, 4096, est, d'après ce qu'on vient de voir (**393**), égal au premier, 16, multiplié par la huitième puissance de la raison. Le quotient de 4096 par 16, ou 256, est donc égal à la huitième puissance de la raison. Par suite, la raison est *la racine huitième de* 256, ou **2**.

La progression demandée est donc

16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096.

En général, *pour avoir la raison de la progression cherchée, on divise le second nombre par le premier, et on extrait de ce quotient une racine de degré égal au nombre de moyens à insérer, augmenté d'une unité.*

395. Théorème. *Si l'on insère, entre les termes consécutifs d'une progression par quotient, le même nombre de moyens proportionnels, les progressions partielles obtenues forment une seule et même progression.*

Supposons que l'on insère trois moyens proportionnels entre les termes consécutifs de la progression par quotient 12, 192, 3072, 49152, etc. Les raisons des progressions partielles successives seront (**394**) :

$$\sqrt[4]{\frac{192}{12}}, \quad \sqrt[4]{\frac{3072}{192}}, \quad \sqrt[4]{\frac{49152}{3072}}, \quad \text{etc.}$$

Or les quotients de 192 par 12, de 3072 par 192, de 49152 par 3072, etc., sont tous égaux à la raison 16 de la progression donnée. Par conséquent, les progressions partielles ont toutes pour raison *la racine quatrième de* 16, ou **2**. D'ailleurs, le dernier terme de chacune d'elles est le premier terme de la suivante. Donc toutes ces progressions ne forment qu'une seule et même progression.

396. Problème III. *Trouver la somme des termes d'une progression par quotient.*

Soit la progression croissante par quotient

$$3, \quad 12, \quad 48, \quad 192, \quad 768, \quad 3072, \quad 12288.$$

En représentant par S la somme des termes de cette progression, on a

$$S = 3 + 12 + 48 + 192 + 768 + 3072 + 12288.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par la raison 4, en observant que le produit d'un terme par la raison égale le terme suivant; il viendra

$$4S = 12 + 48 + 192 + 768 + 3072 + 12288 + 12288 \times 4.$$

Si de cette nouvelle égalité on retranche la première, il vient

$$4S - S = 12288 \times 4 - 3,$$

ou

$$(4 - 1)\,S = 12288 \times 4 - 3,$$

d'où

$$S = \frac{12288 \times 4 - 3}{4 - 1} = \mathbf{16383}.$$

En général, *pour avoir la somme des termes d'une progression croissante par quotient, on multiplie le dernier terme par la raison; on retranche du produit le premier terme, et on divise la différence par la raison diminuée de l'unité.*

Si la progression est décroissante, on la suppose écrite dans l'ordre inverse, et on applique la même règle (*).

CHAPITRE III

DES LOGARITHMES EN GÉNÉRAL (**)

397. Étant données deux progressions, indéfinies dans les deux sens, l'une par quotient, commençant par l'*unité*, l'autre par différence, commençant par *zéro*, les termes de la progression par différence sont dits les *logarithmes* des termes correspondants de la progression par quotient.

Ainsi les deux progressions

$$\begin{array}{lllllllll} \ldots \frac{1}{4096}, & \frac{1}{512}, & \frac{1}{64}, & \frac{1}{8}, & 1, & 8, & 64, & 512, & 4096, \ldots \\ \ldots -12, & -9, & -6, & -3, & 0, & 3, & 6, & 9, & 12, \ldots \end{array}$$

forment un *système de logarithmes*, dans lequel on a

$$\log 1 = 0, \quad \log 8 = 3, \quad \log 64 = 6, \quad \log 512 = 9, \quad \text{etc.};$$
$$\log \tfrac{1}{8} = -3, \quad \log \tfrac{1}{64} = -6, \quad \log \tfrac{1}{512} = -9, \text{ etc.}$$

(*) Si l'on appelle a le premier terme d'une progression par quotient, l le dernier, q la raison, n le nombre et s la somme des termes, on a

$$l = aq^{n-1}, \qquad s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

(**) L'invention des logarithmes est due à JEAN NÉPER, baron de Merchiston, qui la publia en 1614.

La théorie des logarithmes n'est guère susceptible d'une exposition élémentaire; elle suppose la théorie des *nombres négatifs*, des *nombres incommensurables*, des *nombres approchés* et de l'*exponentielle* a^x.

398. Si l'on insère, entre les termes consécutifs de la progression par quotient, un nombre quelconque de moyens, et, entre les termes consécutifs de la progression par différence, le même nombre de moyens, chaque terme de la nouvelle progression par différence est dit le *logarithme* du terme correspondant de la nouvelle progression par quotient.

Supposons, par exemple, que l'on insère deux moyens entre les termes consécutifs des deux progressions ci-dessus : la raison de la nouvelle progression par quotient sera (**394**) $\sqrt[3]{8}$ ou **2**, et la raison de la nouvelle progression par différence sera (**389**) 3 : 3 ou **1**. Les deux nouvelles progressions sont donc :

$$\ldots \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$$
$$\ldots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

et, par suite, on a

$$\log 1 = 0, \quad \log 2 = 1, \quad \log 4 = 2, \quad \log 8 = 3, \quad \log 16 = 4, \quad \text{etc.};$$
$$\log \tfrac{1}{2} = -1, \quad \log \tfrac{1}{4} = -2, \quad \log \tfrac{1}{8} = -3, \quad \log \tfrac{1}{16} = -4, \text{ etc.}$$

399. *Un nombre quelconque peut être considéré comme faisant partie de la progression par quotient.* Car, par l'insertion d'un nombre convenable de moyens, on peut faire entrer dans la progression, soit ce nombre lui-même, soit un autre nombre qui n'en diffère que d'aussi peu qu'on le veut, et qu'on peut, par conséquent, prendre pour ce nombre lui-même (*). Si l'on insère ensuite, dans la progression par différence, le même nombre de moyens, le moyen différentiel correspondant au nombre donné sera le logarithme de ce nombre (**398**).

Il résulte de là que *tout nombre a un logarithme.*

400. On appelle *base* d'un système de logarithmes le nombre qui a pour logarithme l'unité.

Ainsi, dans le système de logarithmes considéré précédemment, on a $\log 2 = 1$, et, par suite, **2** est la base de ce système.

(*) Voir, pour la démonstration de cette proposition, les traités d'Algèbre.

401. Théorème I. *Le logarithme d'un produit est égal à la somme des logarithmes de ses facteurs.*

On a, par exemple,

$$\log(a \times b) = \log a + \log b.$$

Pour le démontrer, insérons, entre les termes consécutifs de la progression par quotient, assez de moyens pour que les nombres a et b fassent partie de la nouvelle progression, soit exactement, soit, ce qui revient au même, avec autant d'approximation qu'on voudra. Soit q la raison, généralement incommensurable, de cette nouvelle progression. Insérons, entre les termes consécutifs de la progression par différence, le même nombre de moyens, et soit r la raison de la nouvelle progression. On aura le système des deux progressions :

$$\begin{array}{cccccccccc} \cdots & \frac{1}{q^4}, & \frac{1}{q^3}, & \frac{1}{q^2}, & \frac{1}{q}, & 1, & q, & q^2, & q^3, & q^4, \cdots \\ \cdots & -4r, & -3r, & -2r, & -r, & 0, & r, & 2r, & 3r, & 4r, \cdots \end{array}$$

où nous supposerons, pour fixer les idées, q plus grand que l'unité.

Il peut se présenter trois cas :

1° Les deux nombres a et b sont tous deux plus grands que l'unité. Soient, par exemple,

$$a = q^m, \quad b = q^n, \qquad \text{d'où} \qquad ab = q^{m+n}.$$

On a, par définition (**398**),

$$\log a = mr, \quad \log b = nr, \quad \log ab = (m + n)r,$$

et, par suite,

$$\log ab = \log a + \log b;$$

2° Les deux nombres a et b sont tous deux plus petits que l'unité. Soient, par exemple,

$$a = \frac{1}{q^m}, \quad b = \frac{1}{q^n}, \qquad \text{d'où} \qquad ab = \frac{1}{q^{m+n}}.$$

On a, par définition,

$$\log a = -mr, \quad \log b = -nr, \quad \log ab = -(m+n)r,$$

et, par suite,

$$\log ab = \log a + \log b;$$

3° Les nombres a et b sont l'un plus grand, l'autre plus petit que l'unité. Soient, par exemple,

$$a = q^m, \quad b = \frac{1}{q^n}, \qquad \text{d'où} \qquad ab = q^{m-n} \text{ ou } \frac{1}{q^{n-m}},$$

suivant que m est plus grand ou plus petit que n (*).

On a, par définition,

$$\log a = mr, \quad \log b = -nr, \quad \log ab = (m-n)r \quad \text{ou} \quad -(n-m)r,$$

et, par suite,

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Le théorème s'étend facilement au cas de plusieurs facteurs (**).

402. Théorème II. *Le logarithme d'un quotient est égal au logarithme du dividende moins le logarithme du diviseur.*

On a

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

En effet, posons

$$\frac{a}{b} = q,$$

d'où

$$a = b \times q.$$

(*) On a, en effet, pour $m > n$,

$$ab = \frac{q^m}{q^n} = \frac{q^m : q^n}{q^n : q^n} = q^{m-n},$$

et, pour $m < n$,

$$ab = \frac{q^m}{q^n} = \frac{q^m : q^m}{q^n : q^m} = \frac{1}{q^{n-m}}.$$

(**) La démonstration qui précède suppose quelques notions d'Algèbre.

On a, en vertu du théorème I,

$$\log a = \log b + \log q,$$

d'où

$$\log q = \log a - \log b,$$

ou

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b.$$

403. Théorème III. *Le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre multiplié par le degré de la puissance.*

On a, par exemple,

$$\log a^4 = 4 \log a.$$

En effet, on a (**251**)

$$a^4 = a \times a \times a \times a,$$

et, par suite, en vertu du théorème I,

$$\log a^4 = \log a + \log a + \log a + \log a,$$

ou

$$\log a^4 = 4 \log a.$$

404. Théorème IV. *Le logarithme d'une racine d'un nombre est égal au logarithme de ce nombre divisé par le degré de la racine.*

On a, par exemple,

$$\log \sqrt[6]{a} = \tfrac{1}{6} \log a.$$

En effet, posons

$$\sqrt[6]{a} = r,$$

d'où (**251**)

$$a = r^6.$$

On a, en vertu du théorème III,

$$\log a = 6 \log r,$$

d'où

$$\log r = \tfrac{1}{6} \log a,$$

ou

$$\log \sqrt[6]{a} = \tfrac{1}{6} \log a.$$

405. On voit, par les théorèmes qui précèdent, que l'emploi d'une *table* : *logarithmes* permet de remplacer la multiplication par une addition, division par une soustraction, l'élévation aux puissances par une ultiplication, et l'extraction des racines par une division.

Pour trouver, par exemple, le produit de plusieurs nombres, on fait la mme des logarithmes de ces nombres : le nombre qui a cette somme ur logarithme est le produit cherché.

CHAPITRE IV

DES LOGARITHMES DÉCIMAUX

406. Le système des logarithmes usuels a pour base 10. Il est défini r les deux progressions :

0·0001,	0·001,	0·01,	0·1,	1,	10,	100,	1000,	10000,	...
— 4,	— 3,	— 2,	— 1,	0,	1,	2,	3,	4,	...

407. Les logarithmes *décimaux* jouissent des propriétés suivantes :

1° *Le logarithme d'un nombre qui est une puissance de* 10 *est positif et al au degré de cette puissance.* On a, par exemple, log 1 000 000 = **6**;

2° *Le logarithme d'un nombre qui est une puissance de* 0·1 *est négatif et al au degré de cette puissance.* On a, par exemple, log 0·000 001 = — **6**;

3° *Le logarithme d'un nombre qui n'est pas une puissance de* 10 *ou de* 1 *est incommensurable* (*). On l'exprime de façon à lui donner une *partie tière*, appelée *caractéristique*, laquelle est positive, nulle ou négative, et e *partie décimale*, appelée *mantisse*, laquelle est positive, et approchée moins d'une demi-unité de l'ordre de son dernier chiffre;

4° *La caractéristique du logarithme d'un nombre qui a une partie entière positive et égale au nombre des chiffres, moins* 1, *de cette partie entière.*

(*) Voir, pour la démonstration de cette proposition, les traités d'Algèbre.

Soit, par exemple, le nombre 2987·6, qui a quatre chiffres à sa partie entière. Ce nombre est compris entre 1000 et 10000 : son logarithme est donc compris entre 3 et 4, et, par suite, est égal à **3**, *plus une fraction proprement dite;*

5° *La caractéristique du logarithme d'un nombre décimal, sans partie entière, est négative et égale à autant d'unités que l'indique le rang occupé par son premier chiffre significatif.*

Soit, par exemple, le nombre 0·00527, dont le premier chiffre significatif occupe le troisième rang, ou celui des millièmes. Ce nombre est compris entre 0·001 et 0·01 : son logarithme est donc compris entre — 3 et — 2, et, par suite, est égal à — **3**, *plus une fraction proprement dite.*

6° *Quand on multiplie ou qu'on divise un nombre par* 10^n, *la partie décimale de son logarithme ne change pas, mais sa caractéristique augmente ou diminue de* n *unités.* On a, en effet,

$$\log(a \times 10^n) = \log a + \log 10^n = \log a + n;$$

$$\log \frac{a}{10^n} = \log a - \log 10^n = \log a - n.$$

Il résulte de là que *les nombres formés des mêmes chiffres, écrits dans le même ordre, et qui ne diffèrent que par la position du point décimal, ont même partie décimale à leurs logarithmes.*

Par exemple, les logarithmes des nombres 0·0078, 0·078, 0·78, 7·8, 78, 780, etc., ont même partie décimale, savoir, **89209** cent-millièmes, et ne diffèrent que par leurs caractéristiques, qui sont respectivement : — 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, etc., en sorte que l'on a :

$$\log 0{\cdot}0078 = \bar{3}{\cdot}89209, \qquad \log 7{\cdot}8 = 0{\cdot}89209,$$
$$\log 0{\cdot}078 = \bar{2}{\cdot}89209, \qquad \log 78 = 1{\cdot}89209,$$
$$\log 0{\cdot}78 = \bar{1}{\cdot}89209, \qquad \log 780 = 2{\cdot}89209, \text{ etc.}$$

Comme il a été dit, la partie décimale de tous ces logarithmes est positive, mais la caractéristique est positive, nulle ou négative, selon les cas. Par exemple, $\bar{3}{\cdot}89209$ est la même chose que $-3 + 0{\cdot}89209$.

408. On appelle *cologarithme*, ou *complément d'un logarithme*, ce qu'il faut ajouter à ce logarithme pour avoir zéro.

Pour avoir le complément d'un logarithme, on augmente sa caractéristique de 1, *et on change le signe de la somme; on soustrait chaque chiffre décimal de* 9 *et le dernier chiffre significatif à droite de* 10.

En effet, la somme des parties entières du logarithme et de son complément, formé d'après cette règle, est égale à — 1, et la somme des parties décimales est égale à + 1 : la somme des deux logarithmes est donc égale à — 1 + 1 ou à 0.

Soit, par exemple, à chercher le complément du logarithme 3·89209. On dira : 3 et 1 **4**, et, en changeant le signe, — **4**; 8 de 9 **1**; 9 de 9 **0**; 2 de 9 **7**; 0 de 9 **9**; 9 de 10 **1** : le cologarithme est $\bar{4}$·**10791**.

Soit, de même, à chercher le complément du logarithme $\bar{4}$·10791. On dira : — 4 et 1 — **3**, et, en changeant le signe, + **3**; 1 de 9 **8**; 0 de 9 **9**; 7 de 9 **2**; 9 de 9 **0**; 1 de 10 **9** : le cologarithme est **3·89209**.

Au lieu de soustraire un logarithme, il revient au même d'ajouter son complément.

Ainsi, au lieu de soustraire le logarithme 3·89209, il revient au même d'ajouter son complément $\bar{4}$·10791.

On a, en effet, par définition,

$$3{\cdot}89209 + \bar{4}{\cdot}10791 = 0,$$

d'où

$$-\,3{\cdot}89209 = +\,\bar{4}{\cdot}10791.$$

CHAPITRE V

USAGE DES TABLES DE LOGARITHMES

409. Problème I. *Étant donné un nombre entier ou décimal, trouver son logarithme.*

Nous supposons que l'on ait entre les mains une table de logarithmes des 10000 premiers nombres, à cinq décimales.

Le nombre, abstraction faite du point décimal, ou des zéros écrits à la droite du dernier chiffre significatif, peut avoir moins de cinq chiffres ou plus de quatre chiffres.

Premier cas : *le nombre a moins de cinq chiffres.*

Soient, par exemple, les nombres 18'86, 18860, 0'001886.

On sait que les logarithmes de ces nombres ont pour caractéristiques respectives **1**, **4**, $\bar{\mathbf{3}}$ (**407**, 4° et 5°). On sait aussi que ces logarithmes ont même partie décimale (**407**, 6°).

On cherche, dans la table de logarithmes, à la colonne intitulée N, le nombre 1886, et on trouve, à droite, à la colonne intitulée *log*, la partie décimale du logarithme de ce nombre, savoir, **27554** cent-millièmes.

On a donc

$$\log 18'86 = \mathbf{1'27554},\ \log 18860 = \mathbf{4'27554},\ \log 0'001886 = \bar{\mathbf{3}}'\mathbf{27554}.$$

Deuxième cas : *le nombre a plus de quatre chiffres.*

Soit, par exemple, le nombre 3'14159.

La caractéristique du logarithme de ce nombre est égale à **0** (**407**, 4°), et sa partie décimale est la même que celle du logarithme du nombre 3141'59, qui a quatre chiffres à sa partie entière (**407**, 6°).

On cherche, dans la table, à la colonne intitulée N, le nombre 3141, et on trouve, à droite, à la colonne intitulée *log*, la partie décimale du logarithme de ce nombre, savoir, **49707** cent-millièmes; puis, à la colonne intitulée D, la *différence tabulaire* **14**, qui indique que *le logarithme du nombre* 3142 *surpasse de* 14 *cent-millièmes le logarithme du nombre* 3141.

On dira donc :

Lorsqu'au nombre 3141 on ajoute 1, on doit ajouter 14 cent-millièmes à son logarithme;

Lorsqu'au nombre 3141 on ajoute 0'59, on doit ajouter à son logarithme les 0'59 de 14 cent-millièmes, ou $14 \times 0'59 = \mathbf{8}$ cent-millièmes (*).

(*) Ce raisonnement suppose le principe suivant, démontré dans les traités d'Algèbre : *Lorsque la différence de deux nombres est très petite par rapport à ces nombres, les accroissements du plus petit sont, dans cet intervalle, sensiblement proportionnels aux accroissements des logarithmes.*

La partie décimale du logarithme du nombre 3141·59 est donc égale à **49707 + 8 = 49715** cent-millièmes, et, par suite, on a

$$\log 3{\cdot}14159 = \mathbf{0{\cdot}49715}.$$

On peut disposer les calculs comme il suit :

log 3·141	0·49707
·59 × 14. . .	8
log 3·14159	**0·49715**

On déduit de là la règle suivante :

Pour avoir la partie décimale du logarithme d'un nombre de plus de quatre chiffres, on suppose le point décimal placé à la droite du quatrième chiffre de ce nombre. On écrit la partie décimale du logarithme de la partie entière, et on multiplie la partie décimale par la différence tabulaire. Enfin, on ajoute la partie entière du produit à la partie décimale déjà écrite.

Il est plus simple, dans certains cas, d'augmenter la partie entière d'une unité, et de remplacer la partie décimale par son complément à l'unité.

410. Problème II. *Étant donné un logarithme, trouver le nombre correspondant.*

Soit proposé de trouver le nombre qui a pour logarithme 1·75812.

La caractéristique de ce logarithme étant 1, le nombre cherché a deux chiffres à sa partie entière (**407**, 4°). La suite des chiffres de ce nombre est d'ailleurs indépendante de la caractéristique (**407**, 6°). Supposons donc, pour un moment, que la caractéristique de ce logarithme soit 3 : le nombre qui a pour logarithme 3·75812 aura quatre chiffres à sa partie entière.

On cherche dans la table, à la colonne intitulée *log*, la partie décimale 75812 de ce logarithme. On trouve 75808, nombre inférieur de 4 cent-millièmes à 75812, et, à gauche, à la colonne intitulée N, le nombre 5729. On a donc

$$3{\cdot}75808 = \log \mathbf{5729}.$$

La différence tabulaire est d'ailleurs égale à 7, c'est-à-dire *le logarithme du nombre* 5730 *surpasse de* 7 *cent-millièmes celui du nombre* 5729. On dira donc :

Lorsqu'au logarithme 3·75808 on ajoute 7 cent-millièmes, on doit ajouter 1 au nombre correspondant 5729;

Lorsqu'au logarithme 3·75808 on ajoute 1 cent-millième, on doit ajouter 7 fois moins au nombre 5729, ou $\frac{1}{7}$;

Et lorsqu'au logarithme 3·75808 on ajoute 4 cent-millièmes, on doit ajouter 4 fois plus au nombre 5729, ou $\frac{4}{7}$, ou **0·6**.

Le nombre correspondant au logarithme 3·75812 est donc **5729·6**.

Par suite, le nombre correspondant au logarithme 1·75812 est **57·296**.

On peut disposer les calculs comme il suit :

1·75808	log 57·29
4 : 7	·6
1·75812	log **57·296**

On déduit de là la règle suivante :

Pour trouver le nombre correspondant à un logarithme donné, on cherche, dans la table, la mantisse immédiatement inférieure à celle du logarithme donné, et on écrit le nombre correspondant. On divise l'excès de la mantisse du logarithme donné sur celle de la table par la différence tabulaire, et on ajoute le quotient au nombre précédemment écrit, considéré comme entier. Enfin on met, dans la somme obtenue, le point décimal à la place qui lui est assignée par la caractéristique du logarithme.

Il est plus simple, dans certains cas, de prendre, dans la table, la mantisse immédiatement supérieure à la mantisse du logarithme donné.

411. Problème III. *Calculer la valeur de* x *donnée par la formule*

$$x = \frac{38475 \times 0{\cdot}0604^3 \times \sqrt{9{\cdot}16} \times \sqrt[7]{0{\cdot}05}}{4{\cdot}7809 \times 0{\cdot}527^4 \times \sqrt[3]{12} \times \sqrt[12]{3}}.$$

On a :

$$\log x = \log 38475 + 3\log 0{\cdot}0604 + \tfrac{1}{2}\log 9{\cdot}16 + \tfrac{1}{7}\log 0{\cdot}05$$
$$- \log 4{\cdot}7809 - 4\log 0{\cdot}527 - \tfrac{1}{3}\log 12 - \tfrac{1}{12}\log 3.$$

$\log 38475$		$4{\cdot}58518$
$3\log 0{\cdot}0604$	$3 \times \bar{2}{\cdot}78104$ (*)	$\bar{4}{\cdot}34312$
$\frac{1}{2}\log 9{\cdot}16$	$\frac{1}{2} \times 0{\cdot}96190$	$0{\cdot}48095$
$\frac{1}{7}\log 0{\cdot}05$	$\frac{1}{7} \times \bar{2}{\cdot}69897$ (**)	$\bar{1}{\cdot}81414$
$\log 4{\cdot}7809$		$0{\cdot}67951$ —
$4\log 0{\cdot}527$	$4 \times \bar{1}{\cdot}72181$	$\bar{2}{\cdot}88724$ —
$\frac{1}{3}\log 12$	$\frac{1}{3} \times 1{\cdot}07918$	$0{\cdot}35973$ —
$\frac{1}{12}\log 3$	$\frac{1}{12} \times 0{\cdot}47712$	$0{\cdot}03976$ —
$\log x$		$1{\cdot}25715$ (***)

$$x = \mathbf{18{\cdot}078}$$

412. Les grandes tables de logarithmes s'étendent jusqu'à 100000 ou 108000, et elles sont à sept décimales.

La colonne intitulée N renferme les nombres de quatre chiffres, et la colonne intitulée 0 donne les logarithmes de ces nombres. On lit, par exemple,

$$\log 1946 = \mathbf{3{\cdot}2891428}; \quad \log 1947 = \mathbf{3{\cdot}2893660}.$$

Lorsqu'un nombre a cinq chiffres, on prend ses quatre premiers chiffres dans la colonne N et son cinquième chiffre dans la ligne N. Les quatre dernières décimales du logarithme se trouvent à l'intersection de la ligne qui renferme les quatre premiers chiffres avec la colonne qui renferme le cinquième chiffre; les trois premières décimales se prennent dans la colonne 0, en descendant ou en remontant, suivant que les quatre

(*) Pour multiplier $\bar{2}{\cdot}78104$ par 3, on dit : 3 fois 4 **12**; 3 fois 1 **3**; 3 fois 8 **24**; 3 fois 7 **21**, et 2 **23**; 3 fois $\bar{2}$ $\bar{6}$, et 2 $\bar{4}$.

(**) Pour diviser $\bar{2}{\cdot}69897$ par 7, on remarque que $\bar{2}{\cdot}69897 = \bar{7} + 5{\cdot}69897$.

(***) On fait à la fois les additions et les soustractions; ou, si l'on veut, on remplace les logarithmes à soustraire par leurs compléments (**408**), que l'on doit s'habituer à prendre à vue.

dernières décimales sont marquées ou non d'un astérisque, ou de quelque autre signe. On lit, par exemple,

$$\log 18864 = \mathbf{4{\cdot}2756338}; \quad \log 34357 = \mathbf{4{\cdot}5360152}.$$

La différence des logarithmes de deux nombres consécutifs de cinq chiffres est écrite dans la colonne intitulée D, c'est-à-dire *différence*, ou P. P., c'est-à-dire *parties proportionnelles*. Au-dessous de chaque différence, on trouve le nombre de *dix-millionièmes* à ajouter au logarithme d'un nombre, quand on ajoute 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *dixièmes* à ce nombre.

On trouve, par exemple, que le nombre 2·7182818 a pour logarithme **0·4342945**, et que le nombre qui a pour logarithme 0·4971499 est **3·141593**.

On peut disposer les calculs comme il suit :

log 2·7182. . . .	0·4342814		
·8 . . .	128	0·4971371. . .	log 3·1415
·01 . .	16	124. . .	·9
·008 . .	128	4. . .	·03
log 2·7182818 . .	**0·4342945**	0·4971499. . .	log **3·141593**

413. Les résultats obtenus par l'emploi des logarithmes ne sont qu'approchés. Avec des tables ne s'étendant que jusqu'à 10000, on ne peut guère compter sur l'exactitude que des cinq ou six premières figures du nombre cherché.

S'il s'agit du calcul d'une puissance d'un nombre, le résultat peut être moins approché encore.

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du calcul de la douzième puissance d'un nombre, et que la table dont on se sert soit à cinq décimales. Le logarithme du nombre n'étant approché qu'à moins d'un demi-centmillième, par défaut ou par excès, son produit par 12 ne sera approché qu'à moins de 6 cent-millièmes, par défaut ou par excès. On ne pourra donc guère compter sur l'exactitude que des trois ou quatre premières figures du nombre.

CHAPITRE VI

DE LA RÈGLE A CALCUL

***414.** La *règle à calcul*, ou *règle logarithmique*, est un instrument, basé sur les propriétés des logarithmes, au moyen duquel on trouve *rapidement* le résultat *approché* de certaines opérations sur les nombres.

Elle se compose d'une partie fixe, qui est la *règle* proprement dite, et d'une partie mobile, nommée *réglette*, qui glisse dans une rainure pratiquée au milieu de la règle.

Sur la partie supérieure de la règle, la seule dont nous ferons usage, sont inscrits les nombres

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,

dont les dix derniers représentent des dizaines.

Les distances du nombre 1 *aux différents nombres sont proportionnelles aux logarithmes de ces nombres.* Ainsi la distance de 1 à 10 représente le logarithme de 10, ou 1, celle de 1 à 6 le logarithme de 6, celle de 1 à 70 le logarithme de 70, celle de 1 à 100 le logarithme de 100, ou 2.

Chaque intervalle entre deux nombres consécutifs de 1 à 10 a été divisé en dix parties qui correspondent aux dixièmes. De 1 à 2 on a marqué de deux en deux les divisions qui correspondent aux centièmes; de 2 à 5 on les a marquées de cinq en cinq ; mais de 5 à 10 on se contente de les estimer à vue.

On a subdivisé de la même manière les intervalles de 10 à 100, les subdivisions du premier ordre correspondant aux unités et celles du second ordre aux dixièmes.

Enfin, les divisions de la réglette sont identiques à celles de la règle.

Cela étant, les logarithmes des nombres 1·48, 3·75, 9·6, par exemple, sont représentés, sur la règle ou sur la réglette, par les distances de l'origine 1 respectivement au vingt-quatrième trait compris entre 1 et 2, au quinzième entre 3 et 4, au sixième entre 9 et 10.

De même, les logarithmes des nombres 14'8, 37'5, 96 sont représentés par les distances de l'origine 1 respectivement au vingt-quatrième trait compris entre 10 et 20, au quinzième entre 30 et 40, au sixième entre 90 et 100.

***415.** Problème I. *Multiplier* 1245 *par* 0'6748.

Opérant comme si l'on avait à multiplier 1'24 par 6'75, *on amène l'origine* 1 *de la réglette au-dessous du facteur* 1'24, *lu sur la règle; et, au-dessus du facteur* 6'75, *lu sur la réglette, on lit le produit* **8'37** : car le logarithme du nombre 8'37 est égal à la somme des logarithmes des deux nombres 1'24 et 6'75. Mais, comme le premier facteur a été divisé par 1000 et le second multiplié par 10, le produit a été divisé par 100 : donc le produit demandé est 8'37 × 100 ou **837**.

***416.** Problème II. *Diviser* 1245 *par* 0'6748.

Opérant comme si l'on avait à diviser 12'5 par 6'75, *on amène le diviseur* 6'75, *lu sur la réglette, sous le dividende* 12'5, *lu sur la règle; et, au-dessus de l'origine* 1 *de la réglette, on lit le quotient* **1'85** : car le logarithme du nombre 1'85 est égal à la différence des logarithmes des deux nombres 12'5 et 6'75. Mais, comme le dividende a été divisé par 100 et le diviseur multiplié par 10, le quotient a été multiplié par 1000 : donc le quotient demandé est 1'85 × 1000 ou **1850**.

***417.** Problème III. *Trouver la quatrième proportionnelle aux nombres* 49, 39, 29.

Opérant comme si l'on avait à chercher la quatrième proportionnelle aux nombres 4'9, 39, 2'9, *on amène le premier nombre* 4'9, *lu sur la réglette, au-dessous du deuxième nombre* 39, *lu sur la règle; et, au-dessus du troisième nombre* 2'9, *lu sur la réglette, on lit la quatrième proportionnelle cherchée* **23'1**.

LIVRE SEPTIÈME

LES MESURES

—

CHAPITRE I

DE LA FORMATION D'UN SYSTÈME GÉNÉRAL & UNIFORME DE MESURES

418. Les grandeurs ou quantités sont *continues* ou *discontinues*.

Les grandeurs *discontinues* sont formées de parties *distinctes*, dont chacune est une *unité*. On ne peut les augmenter ou les diminuer que par *unités*.

Un nombre d'hommes, par exemple, est une grandeur discontinue.

Compter, c'est chercher combien de parties distinctes ou *unités* renferme une grandeur discontinue.

Une grandeur discontinue est toujours représentée par un *nombre entier*.

Les grandeurs *continues* sont formées de parties *non distinctes*. On peut les augmenter ou les diminuer d'autant ou d'aussi peu qu'on le veut.

La longueur d'une ligne, par exemple, est une grandeur continue.

Mesurer une grandeur continue, c'est la comparer à une autre grandeur de même espèce, appelée *unité de mesure*, pour trouver combien elle contient de fois cette unité et combien de parties de cette unité.

Une grandeur continue est représentée par le *nombre entier* 6, par exemple, lorsqu'elle renferme six fois l'unité de mesure.

Elle est représentée par la *fraction* $\frac{4}{7}$, lorsqu'elle renferme quatre fois la septième partie de l'unité de mesure.

Elle est représentée par le *nombre fractionnaire* $5\frac{3}{4}$, lorsqu'elle renferme cinq fois l'unité de mesure, plus encore les $\frac{3}{4}$ de cette même unité.

Il est évident que l'unité de mesure des grandeurs continues est complètement arbitraire.

De là, en tous temps et en tous lieux, cette excessive diversité des mesures créées pour les transactions ordinaires de la vie.

*419. On ne peut voir, dit LAPLACE (*), le nombre prodigieux de mesures en usage, non seulement chez les différents peuples, mais dans la même nation, leurs divisions bizarres et incommodes pour les calculs, la difficulté de les connaître et de les comparer, enfin l'embarras et les fraudes qui en résultent dans le commerce, sans regarder comme l'un des plus grands services que les gouvernements puissent rendre à la société l'adoption d'un système de mesures dont les divisions uniformes se prêtent le plus facilement au calcul, et qui dérivent de la manière la moins arbitraire d'une mesure fondamentale indiquée par la nature elle-même. Un peuple qui se donnerait un semblable système réunirait, à l'avantage d'en recueillir les premiers fruits, celui de voir son exemple suivi par les autres peuples dont il deviendrait ainsi le bienfaiteur; car l'empire lent mais irrésistible de la raison l'emporte, à la longue, sur les jalousies nationales, et surmonte tous les obstacles qui s'opposent au bien généralement senti.

Tels furent les motifs qui déterminèrent l'Assemblée Constituante, sous LOUIS XVI, à décréter, le 8 mai 1790, la création d'un système général et uniforme de nouvelles mesures. La Commission, nommée pour cet objet par l'Académie des Sciences, fut composée de BORDA, LAGRANGE, LAPLACE, MONGE et CONDORCET.

1° L'identité du calcul décimal et de celui des nombres entiers ne laisse aucun doute sur les avantages de la division de toutes les espèces de mesures en parties décimales. On ne balança donc point à adopter la division décimale; et, pour mettre de l'uniformité dans le système entier des mesures, on résolut de les dériver toutes d'une même mesure linéaire et de ses divisions décimales. La question fut ainsi réduite au choix de cette mesure universelle, à laquelle on donna le nom de *mètre*.

2° La longueur du pendule qui bat l'unité de temps et celle du méridien terrestre sont les deux principaux moyens qu'offre la nature pour fixer l'unité des mesures linéaires. Le premier moyen a l'inconvénient de faire dépendre la mesure de la distance de deux éléments qui lui sont

(*) *Exposition du système du monde*, livre premier, chapitre XIV.

hétérogènes, la pesanteur et le temps dont la division est d'ailleurs arbitraire, et dont on ne pouvait admettre la division sexagésimale pour fondement d'un système décimal de mesures. On se détermina donc pour le second moyen, et on décida que l'unité des mesures linéaires serait une partie aliquote du méridien terrestre, correspondant à l'une des divisions de la circonférence. Ainsi le choix du mètre fut réduit à celui de l'unité des angles.

3° L'angle droit est la limite des inclinaisons d'une ligne sur un plan et de la hauteur des objets sur l'horizon; d'ailleurs, c'est au premier quart de la circonférence que se ramènent les sinus et, généralement, toutes les lignes que la Trigonométrie emploie. Il était donc naturel de prendre l'angle droit pour l'unité des angles, et le quart de la circonférence pour l'unité de leur mesure. On le divisa en parties décimales; et, pour avoir des mesures correspondantes sur la Terre, on divisa dans les mêmes parties le quart du méridien terrestre.

4° Il ne s'agissait plus que d'avoir exactement la longueur du méridien terrestre. Pour cela, Méchain et Delambre mesurèrent l'arc du méridien de Paris, compris entre la tour de Dunkerque et la citadelle de Barcelone. Cette mesure, combinée avec celle de l'arc mesuré au Pérou, en 1736, par Bouguer et la Condamine, donna la longueur du quart du méridien égale à **5130740** toises de l'Académie. On prit la dix-millionième partie de cette longueur pour le *mètre* ou l'unité des mesures linéaires (*).

5° Toutes les mesures dérivent du mètre de la manière la plus simple.

L'unité des mesures superficielles pour le terrain est un carré dont le côté est de dix mètres : elle se nomme *are*.

On a nommé *stère* un volume de bois de chauffage égal à un mètre cube.

L'unité des mesures de capacité est le cube de la dixième partie du mètre : on lui a donné le nom de *litre*.

(*) D'après les déterminations les plus récentes, le quart du méridien terrestre est d'environ 10 002 000 mètres. Cet excès de 2000 mètres n'en produit un que de 0·0002 sur la longueur exacte du mètre. Il varie d'ailleurs selon les auteurs et d'après le plus ou moins de poids qu'on accorde à telle mesure d'arc terrestre.

L'unité de poids, que l'on a nommée *gramme*, est le poids de la millionième partie d'un mètre cube d'eau distillée, dans le vide, et à son maximum de densité.

Le *système métrique*, ou *système décimal des poids et mesures*, adopté par la Convention nationale, le 22 juin 1799, fut déclaré obligatoire, en France, à partir du 2 novembre 1801, puis, de nouveau, à partir du 1er janvier 1840.

Aujourd'hui il est *légalement obligatoire* dans les pays suivants : Allemagne, Amérique centrale, Autriche-Hongrie, Belgique, Bolivie, Brésil, Bulgarie, Chili, Colombie, Confédération Argentine, Congo, Danemark, Équateur, Espagne, France, Grèce, Italie, Mexique, Paraguay, Pays-Bas, Pérou, Portugal, Roumanie, Serbie, Suède et Norvége, Suisse, Uruguay, Vénézuéla.

Il est *légalement facultatif* dans les pays suivants : Angleterre, Canada, Égypte, États-Unis, Japon, Turquie.

Il est *toléré* pour les douanes en Russie et dans les Indes anglaises.

CHAPITRE II

LES MESURES DÉCIMALES

420. Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, le *système métrique*, ou *système décimal des poids et mesures*, est établi sur les bases suivantes :

1° Les diverses unités, pour chaque espèce de grandeur, sont des multiples ou des sous-multiples *décimaux* de l'unité principale;

2° Les unités principales des diverses espèces de grandeurs dérivent toutes de l'unité principale de longueur ou du *mètre;*

3° Le rapport qui lie les unités principales des diverses espèces de grandeur au mètre est aussi *décimal*.

Il suit de là que *le calcul des grandeurs rapportées aux mesures métriques se ramène immédiatement au calcul des nombres entiers ou décimaux*, ce qui constitue le principal avantage du système métrique.

Un autre avantage du système métrique est celui de faire dépendre, de la manière la plus simple, le poids d'un corps, de son volume et de son poids spécifique (**567**).

Mesure des angles et des arcs de cercle.

***421.** L'unité naturelle des angles est l'*angle droit*, qui correspond au quart de la circonférence ou *quadrant* (**419**, 3°).

On divise l'angle droit ou le quadrant en 100 *grades*, le grade en 100 *minutes*, la minute en 100 *secondes* (*).

Mesures de longueur.

422. L'unité principale de longueur est le *mètre*.

Le *mètre* est *la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre* (**).

(*) Pour ne pas confondre les minutes et les secondes centésimales (**421**) avec les minutes et les secondes sexagésimales (**439**), on peut aussi, avec M. D'ABBADIE, membre de l'Institut de France, appeler *quartes* les centièmes de grade, ou dix-millièmes du quadrant, et *sixtes* les centièmes de quarte, ou millionièmes du quadrant.

La division décimale du quadrant a été employée par LAPLACE, dans sa *Mécanique céleste*. Elle est encore usitée pour le service géographique de l'armée, en France et en Belgique. Elle épargne, dit M. D'ABBADIE, *les $\frac{2}{7}$ du travail, soit dans l'observation, soit dans le calcul.* (*Géodésie d'Éthiopie*, Paris 1873, page XVIII.)

« Dans nos observatoires, dit encore M. D'ABBADIE, on perfectionnerait largement les moyens d'observation et les méthodes de réduction, en introduisant aussi la division décimale du temps, non en partageant par dix la révolution diurne de la Terre, mais en adoptant le *quart* ou l'unité des marins, c'est-à-dire en prenant pour unité le quadrant ou six heures de notre division vulgaire. Une pendule décimale de ce genre où le temps et l'arc seraient identiques, mettrait fin à ces conversions continuelles du temps en arc, et *vice versa*, où l'on perd tant de temps, tout en s'exposant à tant de fautes. » (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* de Paris, tome LXX, séance du 23 mai 1870.)

Le Congrès scientifique international tenu à Washington en octobre 1884 a exprimé l'espoir de voir étendre l'emploi du système décimal aux mesures des angles et du temps.

(**) Cette définition est celle du *mètre théorique*. En réalité, le *mètre* a été, jusqu'au 26 septembre 1889, *la longueur, à 0°, ou à la température de la glace fondante, de la règle en platine déposée aux Archives de Paris, le 22 juin 1799, et représentant, sensiblement, la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, ou de la distance du pôle à l'équateur, supposée égale à 5 130 740 toises de France* (**419**, 4°); depuis le 26 septembre 1889, le *mètre* est *la longueur, à 0°, d'une barre en platine iridié, en forme d'X, déposée au Bureau international des Poids et Mesures, à Saint-Cloud, et égale, dans les limites d'exactitude que l'on a pu atteindre, à la longueur du mètre des Archives.*

Les multiples du mètre, qui servent aussi d'unités de longueur, sont :

Le *décamètre*, qui vaut dix mètres;

L'*hectomètre*, qui vaut cent mètres;

Le *kilomètre*, qui vaut mille mètres;

Le *myriamètre*, qui vaut dix-mille mètres (*).

Les mots *déca*, *hecto*, *kilo*, *myria* sont tirés du grec, et signifient respectivement *dix*, *cent*, *mille*, *dix-mille*.

Les sous-multiples du mètre, qui servent aussi d'unités de longueur, sont:

Le *décimètre*, qui vaut un dixième de mètre;

Le *centimètre*, qui vaut un centième de mètre;

Le *millimètre*, qui vaut un millième de mètre;

Le *dix-millimètre*, qui vaut un dix-millième de mètre;

Le *cent-millimètre*, qui vaut un cent-millième de mètre;

Le *micron*, qui vaut un millionième de mètre (**).

Les mots *déci*, *centi*, *milli* sont tirés du latin, et signifient respectivement *dixième*, *centième*, *millième*.

423. Les sous-multiples du mètre, le mètre et ses multiples forment une suite d'unités qui sont de dix en dix fois plus grandes.

On peut donc, au moyen de ces différentes unités, exprimer une longueur quelconque par un nombre entier ou décimal.

Ainsi une longueur égale à 4 kilomètres 1 hectomètre 8 mètres 7 décimètres 5 centimètres peut s'écrire de l'une des manières suivantes :

0'410875	myriamètre,	4108'75	mètres,
4'10875	kilomètres,	41087'5	décimètres,
41'0875	hectomètres,	410875	centimètres,
410'875	décamètres,	4108750	millimètres.

On voit que l'on rapporte une même longueur à différentes unités en déplaçant le point décimal de 1, 2, 3... rangs vers la droite ou vers la gauche.

(*) Il y a encore le *mégamètre*, qui vaut un million de mètres. En général, le mot grec *méga*, placé devant le nom d'une unité de mesure, signifie *million*.

(**) On dit *micron* au lieu de *micromètre*, ce dernier mot ayant déjà une autre acception. En général, le mot grec *micro*, placé devant le nom d'une unité de mesure, signifie *millionième*.

Quoique l'unité à laquelle on rapporte les autres soit arbitraire, il convient de ne la prendre ni trop grande ni trop petite relativement à la longueur qu'il s'agit d'évaluer.

Mesures de surface.

424. L'unité principale de surface est le *mètre carré*, ou *le carré qui a un mètre de côté.*

Les multiples du mètre carré, qui servent aussi d'unités de surface, sont le *décamètre carré*, l'*hectomètre carré*, le *kilomètre carré* et le *myriamètre carré*, qui sont des carrés ayant respectivement pour côtés le décamètre, l'hectomètre, le kilomètre et le myriamètre.

Les sous-multiples du mètre carré, qui servent aussi d'unités de surface, sont le *décimètre carré*, le *centimètre carré* et le *millimètre carré*, qui sont les carrés ayant respectivement pour côtés le décimètre, le centimètre et le millimètre.

425. Les sous-multiples du mètre carré, le mètre carré et ses multiples forment une suite d'unités qui sont de cent en cent fois plus grandes.

Je dis, par exemple, que le mètre carré vaut 100 décimètres carrés.

En effet, le mètre carré peut être divisé d'abord en dix *bandes* rectangulaires, ayant un mètre de longueur et un décimètre de largeur; chacune de ces bandes peut, à son tour, être divisée en dix petits carrés, ayant un décimètre de côté : chaque bande rectangulaire contient donc dix décimètres carrés, et les dix bandes, ou le mètre carré, en contiennent dix fois plus, ou cent décimètres carrés.

On peut donc, au moyen des différentes unités susmentionnées, exprimer une surface quelconque par un nombre entier ou décimal.

Ainsi une surface égale à 8 décamètres carrés 7 décimètres carrés 29 centimètres carrés peut s'écrire de l'une des manières suivantes :

8'000729 décamètres carrés,
800'0729 mètres carrés,
80007'29 décimètres carrés,
8000729 centimètres carrés, etc.

On voit que l'on rapporte une même surface à différentes unités en déplaçant le point décimal de 2, 4, 6... rangs vers la droite ou vers la gauche.

426. La Géométrie ramène l'évaluation des surfaces à la mesure de la longueur d'une ou de plusieurs lignes.

Ainsi la surface d'un *rectangle* est égale au produit de sa base par sa hauteur; la surface d'un *triangle* est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur; la surface d'un *trapèze* est égale à la demi-somme de ses bases multipliée par sa hauteur; etc.

Mesures agraires.

427. Pour mesurer les terrains, on prend pour unité principale l'*are*, qui n'est autre chose que le *décamètre carré* (*).

Le seul multiple de l'are, qui soit employé comme unité, est l'*hectare* qui vaut cent ares. L'hectare équivaut à l'hectomètre carré.

Les sous-multiples de l'are, qui sont employés comme unités, sont le *centiare*, qui vaut la centième partie de l'are, et le *milliare*, qui en vaut la millième partie. Le centiare équivaut au mètre carré.

Le centiare, l'are et l'hectare formant une suite d'unités qui sont de cent en cent fois plus grandes, une superficie égale à 30 hectares 45 ares 88 centiares s'écrira de l'une des manières suivantes :

30'4588 hectares, 3045'88 ares, 304588 centiares.

Mesures de volume.

428. L'unité principale de volume est le *mètre cube*, ou *le cube qui a un mètre d'arête.*

Les multiples du mètre cube, qui servent aussi d'unités de volume, sont le *décamètre cube*, l'*hectomètre cube*, le *kilomètre cube* et le *myriamètre cube*, qui sont des cubes ayant respectivement pour arêtes le décamètre, l'hectomètre, le kilomètre et le myriamètre.

(*) Dans la mesure des terres au moyen du ***décamètre***, ou ***chaîne d'arpenteur***, les inégalités du sol font perdre, en général, 2 centimètres par décamètre.

Les sous-multiples du mètre cube, qui servent aussi d'unités de volume, sont le *décimètre cube*, le *centimètre cube* et le *millimètre cube*, qui sont des cubes ayant respectivement pour arêtes le décimètre, le centimètre et le millimètre.

429. Les sous-multiples du mètre cube, le mètre cube et ses multiples forment une suite d'unités qui sont de mille en mille fois plus grandes.

Je dis, par exemple, que le mètre cube vaut 1000 décimètres cubes.

En effet, le mètre cube peut être partagé d'abord en dix *tranches*, ayant un mètre de longueur, un mètre de largeur et un décimètre de hauteur; chacune de ces tranches peut, à son tour, être partagée en dix *règles*, ayant un mètre de longueur, un décimètre de largeur et un décimètre de hauteur; enfin, chacune de ces règles peut aussi être partagée en dix petits cubes, ayant un décimètre d'arête : une règle contient donc dix décimètres cubes; dix règles, ou une tranche, en contiennent dix fois dix, ou cent décimètres cubes; et les dix tranches, ou un mètre cube, en contiennent dix fois cent, ou mille décimètres cubes.

On peut donc, au moyen des différentes unités susmentionnées, exprimer un volume quelconque par un nombre entier ou décimal.

Ainsi un volume égal à 5 mètres cubes 376 décimètres cubes 18 centimètres cubes peut s'écrire de l'une des manières suivantes :

5·376 018 mètres cubes,
5 376·018 décimètres cubes,
5 376 018 centimètres cubes, etc.

On voit que l'on rapporte un même volume à différentes unités en déplaçant le point décimal de 3, 6, 9... rangs vers la droite ou vers la gauche.

430. La Géométrie ramène l'évaluation des volumes à la mesure de la longueur d'une ou de plusieurs lignes.

Ainsi le volume d'un *parallélépipède*, d'un *prisme* ou d'un *cylindre* est égal au produit de sa base par sa hauteur; le volume d'une *pyramide* ou d'un *cône* est égal au tiers du produit de sa base par sa hauteur; etc.

Mesures pour le bois de chauffage.

431. Pour mesurer le volume du bois de chauffage, on prend pour unité principale le *stère*, qui n'est autre chose que le *mètre cube*.

Le seul multiple du stère, qui soit employé comme unité, est le *décastère*, qui vaut dix stères, et le seul sous-multiple est le *décistère*, qui vaut la dixième partie du stère.

Mesures de capacité.

432. Pour mesurer le volume des matières sèches et des liquides, on prend pour unité principale le *litre : c'est une mesure dont la contenance est d'un décimètre cube* (*).

Les multiples du litre, qui servent aussi d'unités de mesure, sont :

Le *décalitre*, qui vaut dix litres ;

L'*hectolitre*, qui vaut cent litres ;

Le *kilolitre*, qui vaut mille litres ;

Le *myrialitre*, qui vaut dix-mille litres.

Les sous-multiples du litre, qui servent aussi d'unités de mesure, sont :

Le *décilitre*, qui vaut un dixième de litre ;

Le *centilitre*, qui vaut un centième de litre ;

Le *millilitre*, qui vaut un millième de litre ;

Le *microlitre*, qui vaut un millionième de litre.

433. Les mesures légales de capacité sont des vases cylindriques dont la hauteur égale le diamètre de la base, ou le double de ce diamètre, suivant qu'on les destine à la mesure des matières sèches ou des liquides.

Dans les poids et les mesures de capacité, chacune des mesures légales de ces deux genres a son double et sa moitié, afin de donner à la vente des divers objets toute la commodité que l'on peut désirer.

(*) Cette définition est celle du *litre théorique*. En réalité, le *litre* est *le volume d'un kilogramme d'eau pure, prise à son maximum de densité et pesée dans le vide*, ce kilogramme étant celui dont il est question dans la note suivante.

Poids.

434. L'unité principale de poids est le *gramme : c'est le poids, dans le vide, d'un centimètre cube d'eau distillée, à la température de 4 degrés centigrades* (*).

On a pris pour unité le poids d'un volume d'eau, parce que l'eau est une des substances les plus homogènes, et que l'on peut amener le plus facilement à l'état de pureté.

On s'est servi d'eau pure ou *distillée,* parce que l'eau non distillée contient en dissolution des matières étrangères, qui font varier son poids sous un même volume.

On a dû prendre l'eau à une température fixe, parce que le poids d'un même volume d'eau varie avec la température. La température choisie est celle à laquelle le poids de l'eau sous un volume donné est le plus grand, savoir, 4 *degrés centigrades* (**).

Enfin, on a pesé l'eau dans le *vide,* c'est-à-dire dans un espace privé d'air, parce qu'*un corps plongé dans un fluide y perd une partie de son poids, égale au poids du fluide déplacé.*

435. Les multiples du gramme, qui servent aussi d'unités de poids, sont :

Le *décagramme,* qui vaut dix grammes;

L'*hectogramme,* qui vaut cent grammes;

Le *kilogramme,* ou *kilo,* qui vaut mille grammes;

Le *myriagramme,* qui vaut dix-mille grammes.

(*) Cette définition est celle du *gramme théorique.* En réalité, le *gramme* est *la millième partie du kilogramme,* et le *kilogramme,* jusqu'au 26 septembre 1889, a été *le poids, dans le vide, d'un cylindre en platine déposé aux Archives de Paris, le 22 juin 1799, et représentant, sensiblement, le poids, dans le vide, d'un décimètre cube d'eau distillée, à la température de 4°;* depuis le 26 septembre 1889, le *kilogramme* est *le poids, dans le vide, d'un cylindre en platine iridié à dix pour cent, déposé au Bureau international des Poids et Mesures, à Saint-Cloud, et égal, dans les limites d'exactitude que l'on a pu atteindre, au kilogramme des Archives.*

(**) Il y avait un double avantage à choisir pour température fixe celle à laquelle l'eau est à son *maximum de densité.* En effet, ce choix est indépendant de la division de l'échelle thermométrique; de plus, le changement de densité de l'eau est très faible autour de ce point, en sorte qu'une légère erreur de température n'influe pas sensiblement sur le poids du liquide.

Il y a aussi le *quintal*, qui vaut cent kilogrammes, et le *millier*, ou *tonne*, ou *tonneau métrique*, qui vaut mille kilogrammes (*).

Les sous-multiples du gramme, qui servent aussi d'unités de poids, sont :

Le *décigramme*, qui vaut un dixième de gramme ;

Le *centigramme*, qui vaut un centième de gramme ;

Le *milligramme*, qui vaut un millième de gramme ;

Le *microgramme*, qui vaut un millionième de gramme.

Correspondance entre les unités de poids, de volume et de capacité.

436. Le tableau suivant met en regard les unes des autres les unités de poids, de volume et de capacité qui se correspondent :

MESURES DE VOLUME	MESURES DE CAPACITÉ	POIDS DE L'EAU DISTILLÉE
Mètre cube.	Kilolitre.	Tonne.
	Hectolitre.	Quintal.
	Décalitre.	Myriagramme.
Décimètre cube.	Litre.	Kilogramme.
	Décilitre.	Hectogramme.
	Centilitre.	Décagramme.
Centimètre cube.	Millilitre.	Gramme.
		Décigramme.
		Centigramme.
Millimètre cube.	Microlitre.	Milligramme.

(*) La *tonne* ou le *tonneau métrique* est un *poids* de mille kilogrammes. Mais, en terme de marine, le *tonneau de mer*, appelé aussi *tonneau d'arrimage* ou *d'affrètement*, est le *volume* moyen occupé à bord d'un navire par un poids d'environ mille kilogrammes de marchandises. Ce volume est habituellement regardé comme équivalent à cent pieds cubes anglais, ou à 2·83 mètres cubes. Ainsi un navire qui jauge 1800 tonneaux, tout en déplaçant environ 1800 mètres cubes d'eau, contient 2·83 × 1800 = 5094 mètres cubes de marchandises.

Abréviations pour les mesures métriques.

437. Les abréviations suivantes pour les mesures métriques ont été adoptées par le *Comité international des Poids et Mesures :*

MESURES DE LONGUEUR	MESURES DE SURFACE	MESURES DE VOLUME	MESURES DE CAPACITÉ	POIDS
Kilom. *km*	Kilom. carré km^2	Mètre cube m^3	Hectolitre *hl*	Tonne *t*
Mètre *m*	Hectare *ha*	Stère *s*	Décalitre *dal*	Quintal *q*
Décim. *dm*	Are *a*	Décim. cube dm^3	Litre *l*	Kilogr. *kg*
Centim. *cm*	Mètre carré m^2	Centim. cube cm^3	Décilitre *dl*	Gramme *g*
Millim. *mm*	Décim. carré dm^2	Millim. cube mm^3	Centilitre *cl*	Décigr. *dg*
Micron μ	Centim. carré cm^2		Millilitre *ml*	Centigr. *cg*
	Millim. carré mm^2		Microlitre λ	Milligr. *mg*
				Microgr. γ

CHAPITRE III

LES MESURES COMPLEXES

438. On appelle *mesures complexes* celles qui, pour une même espèce de grandeur, sont des parties quelconques, *non décimales,* les unes des autres.

Mesure des angles et des arcs de cercle.

439. On divise l'*angle droit* et le *quadrant* (**421**) en 90 *degrés,* le degré en 60 *minutes,* la minute en 60 *secondes.*

Quand on a des angles ou des arcs de cercle moindres qu'une seconde, on les évalue en fraction décimale de la seconde. Autrefois, on subdivisait la seconde en 60 *tierces,* la tierce en 60 *quartes,* etc.

Pour exprimer un angle ou un arc de cercle égal, par exemple, à 37 degrés 20 minutes 48 secondes 6 dixièmes, on écrit : $37^{\circ}20'48''6$.

Mesure du temps.

440. On appelle *jour vrai* le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien.

Les jours vrais n'ayant pas tous la même durée, on a imaginé un *soleil moyen*, passant au méridien d'un même lieu après des intervalles de temps égaux, et on a appelé *jour moyen* le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs de ce soleil fictif au méridien.

Le jour moyen seul peut servir d'unité de temps.

On divise le jour en 24 *heures*, l'heure en 60 *minutes*, la minute en 60 *secondes*. Quand on a des intervalles de temps moindres qu'une seconde, on les évalue en fraction décimale de la seconde. Autrefois, on subdivisait la seconde en 60 *tierces*, la tierce en 60 *quartes*, etc.

Pour exprimer un intervalle de temps égal, par exemple, à 3 jours 10 heures 25 minutes 8 secondes, on écrit : $3^{j}\ 10^{h}\ 25^{m}\ 8^{s}$.

441. Tous les points d'un même méridien de la Terre ont la même heure, mais l'heure varie à chaque point d'un même parallèle, à raison d'une seconde de temps pour 15 secondes d'arc (*). Pour unifier l'heure, on a proposé d'adopter, comme *jour universel, le jour solaire moyen, commençant à minuit moyen du méridien de Greenwich, et compté de* 0 *à* 24 *heures*, et on a partagé la surface du globe en 24 *fuseaux*, dont les méridiens médians se succèdent de 15 en 15 degrés à partir de celui de Greenwich. Ces fuseaux sont numérotés de 0 à 23, en allant par l'Est, et ils indiquent que, lorsqu'il est 0 heure ou minuit à Greenwich, il est 0 heure ou minuit pour tous les points du premier fuseau, 1 heure pour tous les points du deuxième fuseau, 2 heures pour tous les points du troisième fuseau, et ainsi de suite. Toutefois, dans la pratique, les fuseaux

(*) En effet, le Soleil fait le tour de la Terre ou parcourt 360 degrés en 24 heures; il parcourt donc, en 1 heure, un arc de 15 degrés; en 1 minute, un arc de 15 minutes; en 1 seconde, un arc de 15 secondes.

horaires sont limités par les frontières des pays dont ils contiennent la plus grande partie.

En Europe, l'heure du premier fuseau, appelée *heure occidentale,* comprend l'Angleterre, la Belgique, la Hollande, la France, l'Espagne et le Portugal, mais elle n'est jusqu'ici adoptée qu'en Angleterre, en Belgique et en Hollande; l'heure du second fuseau, ou *heure centrale,* comprend la Suède, la Norvége, le Danemark, l'Allemagne, l'Autriche, le Luxembourg, la Suisse, l'Italie, la Grèce et la Serbie; l'heure du troisième fuseau, ou *heure orientale,* comprend la Russie, la Roumanie, la Bulgarie et la Turquie.

442. On appelle *année tropique* le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil à l'équinoxe du printemps.

La durée de l'année tropique est d'environ 365·2422 jours moyens, ou de 365 jours 5 heures 48 minutes 46 secondes.

L'année tropique ne renfermant pas un nombre entier de jours moyens, il a fallu faire l'*année civile* plus longue ou plus courte que l'année tropique.

Dans le *calendrier julien,* institué par JULES CÉSAR, l'an 46 avant JÉSUS-CHRIST, l'année *commune* est de 365 jours; mais, tous les quatre ans, l'année est de 366 jours et est appelée *bissextile. Les années bissextiles sont celles dont le millésime est divisible par* 4.

La durée moyenne de l'année julienne est de $365\frac{1}{4}$ jours. Comme cette durée est un peu trop grande, et produit un retard d'un jour tous les cent vingt-huit ans environ, il devint nécessaire de réformer le calendrier. Cette réforme eut lieu sous le pape GRÉGOIRE XIII, qui décida que le lendemain du 4 octobre 1582 serait compté pour le 15 au lieu du 5, et que *les années séculaires, dont le millésime n'est pas divisible par* 400, *ne seraient plus considérées comme bissextiles* (*).

Le *calendrier grégorien* a été adopté aussitôt dans tous les pays catholiques, et successivement, mais beaucoup plus tard, dans les pays protes-

(*) On voit que, dans le calendrier grégorien, sur 400 années civiles, il y en a 100 moins 3 ou 97 qui sont bissextiles. Ces 400 années renferment donc $365 \times 400 + 97 = 146097$ jours moyens. D'ailleurs, 400 années tropiques renferment $365{\cdot}2422 \times 400 = 146096{\cdot}88$ jours moyens. Donc, après 400 ans, l'avance du temps civil sur le temps astronomique n'est que de 0·12 de jour moyen.

tants. La Russie et la Grèce ont seules conservé le *vieux style,* c'est-à-dire le calendrier julien, actuellement en retard de douze jours sur le nôtre.

Dans le calendrier grégorien, les années 1896, 1904, 1908, 1912, etc., sont bissextiles, comme dans le calendrier julien; il en est de même des années séculaires 1600 et 2000; mais 1700, 1800 et 1900 sont des années communes.

Les 365 ou 366 jours de l'année civile se répartissent en 12 *mois,* savoir : janvier, 31; février, 28 ou 29; mars, 31; avril, 30; mai, 31; juin, 30; juillet, 31; août, 31; septembre, 30; octobre, 31; novembre, 30; décembre, 31.

On appelle *lustre* un espace de cinq ans, et *siècle,* un espace de cent ans.

***443.** La *semaine* se compose de sept jours, qui sont : le *dimanche,* le *lundi,* le *mardi,* le *mercredi,* le *jeudi,* le *vendredi,* le *samedi.*

QUANTIÈMES					Q	JOURS
1	8	15	22	29	1	Dimanche
2	9	16	23	30	2	Lundi
3	10	17	24	31	3	Mardi
4	11	18	25		4	Mercredi
5	12	19	26		5	Jeudi
6	13	20	27		6	Vendredi
7	14	21	28		0	Samedi

SIÈCLES GRÉGORIENS							G
15	19	23	27	31	35	39	1
16	20	24	28	32	36	40	0
17	21	25	29	33	37	41	5
18	22	26	30	34	38	42	3

MOIS	M
Janvier	1
Février	4
Mars	3
Avril	6
Mai	1
Juin	4
Juillet	6
Août	2
Septembre	5
Octobre	0
Novembre	3
Décembre	5

Pour les mois de janvier et de février, diminuer de 1 la date de l'année.

SIÈCLES JULIENS		J
0	14	5
1	15	4
2	16	3
3	17	2
4	18	1
5	19	0
6	20	6
7	21	5
8	22	4
9	23	3
10	24	2
11	25	1
12	26	0
13	27	6

ANNÉES				A	ANNÉES				A
00	28	56	84	0	14	42	70	98	3
01	29	57	85	1	15	43	71	99	4
02	30	58	86	2	16	44	72		6
03	31	59	87	3	17	45	73		0
04	32	60	88	5	18	46	74		1
05	33	61	89	6	19	47	75		2
06	34	62	90	0	20	48	76		4
07	35	63	91	1	21	49	77		5
08	36	64	92	3	22	50	78		6
09	37	65	93	4	23	51	79		0
10	38	66	94	5	24	52	80		2
11	39	67	95	6	25	53	81		3
12	40	68	96	1	26	54	82		4
13	41	69	97	2	27	55	83		5

Pour trouver le nom du jour de la semaine qui correspond à une date donnée du calendrier julien ou grégorien, on cherche, dans le calendrier ci-dessus (*), *les quatre nombres* Q, M, J *ou* G, A, *qui correspondent à la date donnée; on fait la somme de ces nombres, et on cherche cette somme dans le tableau des quantièmes : le jour marqué vis-à-vis est le jour cherché.*

On trouve, par exemple, que le 12 octobre 1492, date de la découverte du Nouveau Monde, était un vendredi, et que le 1er janvier de l'an 2000 sera un samedi.

Mesures pour le vin et le papier et les objets qui se vendent au nombre.

444. Le *tonneau* de vin vaut 4 barriques; la *barrique* ou la *pièce* se divise en 2 *feuillettes* ou 4 *quartauts*. La contenance d'une barrique est assez généralement de 222 à 228 litres. La contenance d'une bouteille est d'environ 70 centilitres.

(*) Ce calendrier est dû à M. Éd. Lucas, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, à Paris, qui a bien voulu nous autoriser à le reproduire ici.

445. La *balle* de papier contient 10 rames. La *rame* contient 20 mains. La *main* contient 18 feuilles de papier brouillard ou d'emballage, ou 24 feuilles de papier à écrire, ou 25 feuilles de papier d'impression.

446. Beaucoup d'objets qui se vendent au nombre, tels que les œufs, les fruits, etc., se comptent par *quarterons*, par *cent*, par *douzaines* ou par *grosses*.

Le *quarteron* est le quart d'un cent d'objets. On le compte souvent de 26 au lieu de 25; le demi-quarteron est alors de 13 et le cent de 104.

Pareillement, la *douzaine* est souvent comptée de 13 au lieu de 12.

La *grosse* est un nombre de douze douzaines.

Mesures anglaises.

*447. Pied de 12 pouces ou 120 lignes	$0^{\cdot}304\,794^{m}$
Yard, 3 pieds	$0^{\cdot}914\,383^{m}$
Pied carré	$0^{\cdot}092\,833^{m2}$
Yard carré, 9 pieds carrés	$0^{\cdot}836\,097^{m2}$
Pied cube	$0^{\cdot}028\,315^{m3}$
Yard cube, 27 pieds cubes	$0^{\cdot}764\,513^{m3}$
Acre, 4 verges de 1210 yards carrés	$40^{\cdot}467\,102^{a}$
Gallon, 8 pintes, $\frac{1}{8}$ de boisseau (*)	$4^{\cdot}543\,458^{l}$
Livre troy, 12 onces de 20 deniers, 5760 grains troy	$373^{\cdot}241\,948^{g}$
Livre avoirdupois, 16 onces de 16 drachmes, 7000 id. (**)	$453^{\cdot}592\,645^{g}$
Livre sterling, 20 shillings de 12 pence (***)	$25^{\cdot}2215^{f}$
Mètre, en pieds anglais	$3^{\cdot}280\,899^{p}$
Kilogramme, en livres avoirdupois	$2^{\cdot}204\,621^{l}$

(*) Le *gallon* contient 10 livres avoirdupois d'eau distillée, pesée avec des poids de cuivre, dans l'air, à la température de 62 degrés Fahrenheit, ou de $16\frac{2}{3}$ degrés centigrades, et sous la pression de 30 pouces anglais, ou de 762 mm.

(**) La livre troy sert d'unité pour les matières précieuses, et la livre avoirdupois pour les usages ordinaires.

(***) Le titre fin de l'or est de 24 *carats* de 4 *grains*, et le titre des monnaies d'or est de 22 carats, c'est-à-dire de $\frac{22}{24}$ ou $\frac{11}{12}$ ou $0^{\cdot}916\frac{2}{3}$.

Le titre fin de l'argent est de 12 *onces* de 20 *deniers*, et le titre des monnaies d'argent est de 222 deniers, c'est-à-dire de $\frac{222}{240}$ ou $\frac{37}{40}$ ou $0^{\cdot}925$ (455).

Lieues et milles.

	Mètres.
***448.** Lieue belge, 5 kilomètres	5000
Lieue française, 4 kilomètres	4000
Mille métrique	1000
Mille géographique, de 15 au degré de l'équateur	7407
Lieue marine ou géographique, de 20 au degré de l'équateur .	5556
Mille marin, de 60 au degré de l'équateur, 120 nœuds . . .	1852
Lieue de 18 au degré du méridien	6173
Lieue de 25 au degré du méridien	4444
Mille anglais, 8 stades de 110 brasses, 5280 pieds	1609
Verste de Russie, 500 sagènes, 3500 pieds anglais	1067

CHAPITRE IV

LES MONNAIES (*)

449. On appelle *monnaie* un objet que la loi a constitué *mesure commune de la valeur des choses.*

Les monnaies sont, soit en métal précieux, or ou argent, soit en métal vil, cuivre, bronze ou nickel.

Pour diminuer le *frai* ou usure des monnaies d'or et d'argent, on les allie d'un peu de cuivre, et on appelle *titre* le rapport du poids de l'or ou de l'argent au poids total de l'alliage.

***450.** On distingue les monnaies en *monnaies principales*, aussi appelées *monnaies pleines, monnaies de paiement* ou *monnaies courantes*, et en *monnaies auxiliaires,* aussi appelées *monnaies divisionnaires*, *monnaies d'appoint* ou *billon.*

Il importe de bien saisir les caractères qui distinguent les monnaies principales des monnaies auxiliaires.

(*) Voir ma brochure intitulée *La Monnaie,* Paris, Guillaumin et Cie, 1887.

Les monnaies principales ont la valeur du métal, or ou argent, qu'elles contiennent. En le monnayant, on pèse et on titre le métal sous le contrôle de l'État; mais on n'ajoute ni ne retranche rien à sa valeur absolue.

Aussi *la frappe des monnaies principales est libre* dans la plupart des pays, c'est-à-dire que toute personne a le droit de porter aux Hôtels des Monnaies des lingots pour en obtenir des monnaies principales, soit gratuitement, comme en Angleterre, soit moyennant une taxe fixe, très légère, qui est touchée par l'entrepreneur du monnayage pour prix de son travail. Cette liberté de la frappe est le premier caractère des monnaies principales.

Le second caractère des monnaies principales, c'est *leur force libératoire illimitée.* On peut effectuer tout paiement, à quelque somme qu'il s'élève, avec les monnaies principales.

Enfin, le troisième caractère des monnaies principales, c'est qu'elles n'entraînent pour l'État, dont elles portent l'empreinte, d'autre responsabilité que *la garantie de leur poids et de leur titre,* et nullement du maintien de la valeur du métal dont elles sont formées. Bien plus, l'État n'est pas même responsable de l'usure des monnaies, en sorte que, lorsqu'une pièce a perdu de son poids une certaine partie, déterminée par la loi, elle peut être refusée, et la pièce reste au porteur sans qu'il puisse forcer à la recevoir en paiement.

Tout autres sont les caractères des *monnaies auxiliaires.* Ces monnaies, qui sont en métal vil, ou en métal précieux d'un titre ou d'un poids relativement faible, *ont une valeur intrinsèque inférieure à leur valeur nominale.* Elles ne peuvent donc être livrées à la fabrication libre; c'est l'État qui s'en réserve le monopole. Il n'en frappe toutefois qu'une quantité très limitée, de manière qu'elles ne puissent remplacer les monnaies pleines dans la circulation. De plus, la loi ne leur accorde qu'une force libératoire très restreinte. Elles ne peuvent servir, entre les particuliers de l'État qui les a émises, qu'à payer de faibles sommes, et c'est pour cette raison qu'on les appelle *monnaies d'appoint.* Enfin, l'État, qui, à son grand bénéfice, émet ces monnaies pour une valeur nominale supérieure à leur valeur intrinsèque, en est entièrement responsable. Il est obligé de garantir leur valeur nominale, et, par suite, de les accepter en paiement

ans limitation de quantité, de les échanger même contre une égale valeur e monnaies principales, et, enfin, quand elles sont usées, de les retirer e la circulation, sans aucune perte pour les détenteurs.

D'après ce qui précède, *les monnaies principales seules sont des monnaies roprement dites,* c'est-à-dire pouvant servir de mesure commune de la aleur des choses, puisqu'elles seules ont la valeur du métal qu'elles ontiennent et ont une force libératoire illimitée.

451. On appelle *étalon monétaire* le métal, or ou argent, avec lequel ont fabriquées les monnaies principales.

L'Allemagne, l'Angleterre, l'Autriche, le Brésil, le Canada, le Chili, e Danemark, l'Égypte, la Finlande, la Norvége, le Portugal, le Salvador, la Suède, la Turquie, l'Uruguay ont l'étalon unique d'or.

L'Amérique centrale, la Belgique, la Bolivie, la Bulgarie, la Colombie, la Confédération Argentine, l'Équateur, l'Espagne, les États-Unis, la France, la Grèce, la Hollande, les Indes anglaises, l'Italie, le Japon, le Mexique, le Pérou, la Perse, la Roumanie, la Russie, la Serbie, la Suisse, le Vénézuéla ont l'étalon unique d'argent ou le double étalon.

Le système du double étalon ou du *bimétallisme* n'est pas rationnel; car, quand on veut constituer une *mesure commune* de la valeur des choses, c'est évidemment à une seule et même chose qu'il faut ramener toutes les autres. Deux métaux ne peuvent coexister comme mesures de la valeur des choses que grâce à un rapport établi entre eux. Or le rapport fixé par la loi est, en réalité, sujet à varier sans cesse, à cause de la différence de production et de consommation des deux métaux dans les différentes parties du monde. Dès lors, lorsque l'un des deux métaux *fait prime,* on importe, dans les pays à double étalon, pour les faire monnayer, des lingots du métal dont la valeur légale est, dans ces pays, supérieure à sa valeur marchande, et on en exporte les monnaies du métal dont la valeur marchande est supérieure à la valeur légale. A chaque changement de la valeur relative des deux métaux, les pays à double étalon subissent donc, sur leur capital monétaire, des pertes successives de grande importance. De plus, comme c'est le métal déprécié qui reste dans la circulation, il en résulte que le double étalon n'est, en réalité, que

l'*étalon alternatif*, et que c'est le métal déprécié qui devient la mesure commune de la valeur, en sorte que le prix de toutes choses tend à s'élever. C'est ainsi que le rapport de l'or à l'argent, qui, vers le commencement de ce siècle, montait à environ $15\frac{1}{2}$, s'est élevé, en 1840, à $15\frac{5}{16}$, puis est descendu, de 1850 à 1860, jusqu'à $15\frac{1}{4}$, à la suite des découvertes des mines d'or de la Californie et de l'Australie. Depuis 1860, ce rapport a repris sa marche ascendante, et l'argent semble en voie de dépréciation continue (**562** et **578**). Aussi, parmi les pays à double étalon, les uns ont limité, puis suspendu la frappe de l'argent, se mettant ainsi sur la voie de l'adoption du pur étalon d'or; d'autres ont passé à l'étalon d'or, et ont démonétisé la majeure partie de leur stock monétaire d'argent.

Union latine.

452. La France, la Belgique, l'Italie, la Suisse et la Grèce ont conclu, le 23 décembre 1865, une convention monétaire, dite de l'*Union latine*, renouvelée le 5 novembre 1878, puis le 6 novembre 1885, sur les bases suivantes :

1° *L'unité principale de monnaie est le* franc, *monnaie d'argent du poids de* 5^g, *au titre de* 0·9, c'est-à-dire contenant neuf parties de métal fin ou d'argent et une partie de métal vil ou de cuivre.

Les sous-multiples du franc, qui sont employés comme unités, sont : le *décime*, qui vaut un dixième de franc; le *centime*, qui vaut un centième de franc, et le *millime*, qui vaut un millième de franc (*);

2° *L'or monnayé vaut, à poids égal et à titre égal,* $15\frac{1}{2}$ *fois autant que l'argent.*

Le franc d'argent, au titre de 0·9, pesant 5^g, le franc d'or, au même titre, pèse $5^g : 15\frac{1}{2} = \frac{10^g}{31}$ ou $0{\cdot}322581^g$.

Le gramme d'argent monnayé, au titre de 0·9, valant $1^f : 5 = 0{\cdot}20^f$, le gramme d'or, au même titre, vaut $0{\cdot}20^f \times 15\frac{1}{2} = 3{\cdot}10^f$ (**);

(*) On appelle *sou* la vingtième partie du *franc*, ou la *pièce de cinq centimes*, de même qu'autrefois on appelait *sou* la vingtième partie de la livre (**455**).

(**) Si, adoptant l'étalon d'or, on voulait créer une monnaie vraiment métrique, il conviendrait de prendre pour unité *le gramme d'or, au titre de* 0·9, monnaie qui serait frappée dans ses multiples de 2^g, 5^g, 10^g, 20^g, correspondant respectivement à $6{\cdot}20^f$, $15{\cdot}50^f$, 31^f et 62^f de la monnaie actuelle.

3° *Les monnaies principales sont les pièces d'argent de cinq francs, au titre de* 0·9, *et les pièces d'or de cinq francs, de dix francs, de vingt francs, de cinquante francs et de cent francs, aussi au titre de* 0·9.

La frappe de ces monnaies est libre, sauf retenue de 1·50f pour frais de fabrication par kilogramme d'argent au titre de 0·9 et de 6·70f par kilogramme d'or au même titre. Toutefois, par suite de la dépréciation de l'argent, l'Union latine a dû limiter, en 1873, et même suspendre entièrement, en 1876, la frappe des pièces d'argent de cinq francs.

Les pièces d'argent de cinq francs et toutes les pièces d'or ont une *force libératoire illimitée*. Toutefois, les pièces dont les empreintes auraient disparu, ou dont le poids aurait été réduit par le frai d'un pour cent, pour les pièces d'argent de cinq francs, ou d'un demi pour cent, pour les pièces d'or, au-dessous de la *tolérance*, peuvent être refusées, et restent, dans l'un et l'autre de ces cas, à la charge des porteurs;

4° *Les monnaies divisionnaires sont les pièces d'argent de vingt centimes, de cinquante centimes, d'un franc et de deux francs, au titre de* 0·835 (*).

La fabrication de ces pièces est réservée aux divers États, qui toutefois ne peuvent en frapper que pour une valeur correspondant à six francs par habitant, et qui doivent les retirer, sans perte pour les détenteurs, lorsque leurs empreintes ont disparu, ou que leur poids a été réduit par le frai de cinq pour cent au-dessous de la *tolérance*.

Elles ont cours légal, entre les particuliers de l'État qui les a fabriquées, jusqu'à concurrence de 50f pour chaque paiement; les autres États les reçoivent dans leurs caisses jusqu'à concurrence de 100f; mais l'État qui les a émises les reçoit de ses nationaux sans limitation de quantité; il doit même les échanger contre une égale valeur de monnaie principale, pourvu que la somme présentée à l'échange ne soit pas inférieure à 100f (**);

(*) La pièce d'argent d'un franc n'est donc pas le franc unité de monnaie. Le franc, unité de monnaie, n'existe que dans la pièce de cinq francs.

En France, les pièces d'argent au titre de 0·835 renferment 835 parties d'argent, 93 de cuivre et 72 de zinc. Cet alliage présente l'avantage d'être plus blanc que l'alliage au cuivre pur, et de ne pas être noirci par les émanations sulfureuses.

(**) Par suite de la Convention du 25 novembre 1893, les monnaies d'argent divisionnaires italiennes ont dû être retirées de la circulation en Belgique, en France, en Grèce et en Suisse, et rapatriées en Italie.

5° *Quant à la monnaie de cuivre ou de billon, chaque État conserve son système particulier.*

En France, il y a des pièces de bronze de 1, 2, 5 et 10 centimes, pesant respectivement 1, 2, 5 et 10 grammes. Ces pièces renferment 95 parties de cuivre, 4 d'étain et 1 de zinc. Elles n'ont cours obligatoire, entre les particuliers, que pour l'appoint de la somme de cinq francs.

En Belgique, il y a des pièces de nickel de 5 et de 10 centimes, pesant respectivement 3g et 4·5g, et renfermant 3 parties de cuivre et 1 de nickel, et des pièces de cuivre de 1 et de 2 centimes, pesant respectivement 2g et 4g. Ces pièces n'ont cours obligatoire, entre les particuliers, que pour l'appoint de la somme de cinq francs en nickel ou de deux francs en cuivre.

453. Le tableau suivant indique les poids, titres et diamètres des monnaies d'or et d'argent de l'Union latine. Les tolérances de titre et de poids sont tant en dehors qu'en dedans.

VALEUR DES PIÈCES		TITRE		POIDS		DIAMÈTRE OU MODULE DES PIÈCES
		TITRE DROIT	TOLÉRANCE	POIDS DROIT	TOLÉRANCE	
	francs	millièmes	millièmes	grammes	millièmes	millimètres
Or	100	900	1	32·258 065	1	35
	50	900	1	16·129 032	1	28
	20	900	1	6·451 613	2	21
	10	900	1	3·225 806	2	19
	5	900	1	1·612 903	3	17
Argent	5	900	2	25	3	37
	2	835	3	10	5	27
	1	835	3	5	5	23
	0·50	835	3	2·5	7	18
	0·20	835	3	1	10	16

Monnaies de compte des principaux pays.

***454.** Le tableau suivant fait connaître les poids, titres et valeurs *au pair* des *monnaies de compte* des principaux pays. La plupart de ces monnaies n'existent que dans leurs multiples. Les lettres O et A indiquent si elles sont en or ou en argent. On a calculé leurs valeurs en admettant que 5^g d'argent, au titre de 0°9, valent 1^f, et en adoptant $15\frac{1}{2}$ pour le rapport de l'or à l'argent.

France, Belgique, Congo OA : Franc de 100 centimes; ***Bulgarie*** A : Lew de 100 stotinkis; ***Espagne*** OA : Peseta de 100 centimos; ***Finlande*** O : Markka de 100 penni; ***Grèce*** OA : Drachme de 100 lepta; ***Italie*** OA : Lira de 100 centesimi; ***Roumanie*** OA : Ley de 100 banis; ***Serbie*** OA : Dinar de 100 paras; ***Suisse*** OA : Franc de 100 rappen; ***Vénézuéla*** OA : Bolivar de 100 centavos	5·00000g 0·32258	0·900 0·900	1·0000f 1·0000	A O
Amérique centrale A : Piastre ou peso de 100 centavos; ***Bolivie*** A : Boliviano de 10 réaux ou 100 centimos; ***Colombie*** OA : Peso de 10 décimos ou 100 centavos; ***Confédération Argentine*** OA : Peso de 100 centavos; ***Équateur*** A : Sucre de 10 réaux ou 100 centavos; ***Haïti*** A : Gourde de 100 centièmes; ***Maroc*** A : Rial de 20 belions; ***Pérou*** OA : Sol de 10 dineros ou 100 centavos; ***Salvador*** O : Peso de 100 centièmes	25·00000 1·61290	0·900 0·900	5·0000 5·0000	A O
Allemagne : Mark de 100 pfennig	0·39825	0·900	1·2346	O
Angleterre : Livre sterling de 20 shillings ou 240 pence.	7·98806	11 : 12	25·2216	O
Autriche-Hongrie : Couronne ou krone de 100 heller.	0·33875	0·900	1·0501	O
Brésil : Milreis, 1000 reis	0·89648	11 : 12	2·8306	O
Chili : Piastre de 100 centavos	0·79881	11 : 12	2·5222	O
Chine (Canton) : Piastre de 100 centièmes, 0·72 de taël.	26·90000	0·900	5·3800	A
Danemark, Suède, Norvége : Couronne ou krone de 100 ore	0·44803	0·900	1·3889	O
Égypte : Livre de 100 piastres	8·50000	0·875	25·6100	O
États-Unis : Dollar de 100 cents	1·67181 26·72957	0·900 0·900	5·1826 5·3459	O A
Éthiopie : Ber ou thaler de Marie-Thérèse	28·06440	5 : 6	5·1971	A
Hollande : Florin de 100 cents	10·00000 0·67200	0·945 0·900	2·1000 2·0832	A O
Indes anglaises : Roupie de 16 annas ou 192 pices (*).	0·77759 11·66381	11 : 12 11 : 12	2·4552 2·3760	O A

(*) Par suite de la dépréciation continue de l'argent, le gouvernement des Indes a fixé, le 26 juin 1893, la valeur de la roupie d'argent à 16 pence ou $\frac{1}{15}$ de livre sterling, ou à 1·6814f.

Indo Chine française : Piastre de 100 centièmes . .	27·2150	0·900	5·4430	A
Japon : Yen de 100 sen	1·66667	0·900	5·1667	O
	26·95600	0·900	5·3912	A
Mexique : Piastre de 100 centavos (*)	1·69150	0·875	5·0980	O
	27·07300	0·9027	5·4308	A
Perse : Kran de 1000 dinars	0·28500	0·900	0·8835	O
	4·60000	0·900	0·9200	A
Portugal : Milreis, 1000 reis	1·77350	11 : 12	5·5997	O
Russie : Rouble de 100 kopecks	20·00000	0·900	4·0000	A
	1·29030	0·900	4·0000	O
Turquie : Piastre de 40 paras	0·07216	11 : 12	0·2278	O
Uruguay : Piastre de 10 réaux	1·69700	0·917	5·3610	O

On doit observer que, dans les colonies, les monnaies légales sont habituellement celles de la métropole.

CHAPITRE V

MESURES ANCIENNES DE FRANCE

***455.** En France, l'unité de longueur était la *toise,* qui se divisait en 6 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes, la ligne en 12 points. L'*aune,* pour la mesure des étoffes, valait 6322 points. Enfin, les mesures itinéraires étaient le *mille,* qui valait 1000 toises, et la *lieue de poste,* qui valait 2 milles.

L'unité des mesures agraires était l'*arpent de Paris,* valant 100 perches carrées de 18 pieds de côté, ou l'*arpent commun,* valant 100 perches carrées de 20 pieds de côté, ou l'*arpent d'ordonnance,* dit aussi *des eaux et forêts,* valant 100 perches carrées de 22 pieds de côté.

L'unité pour le bois de charpente était la *solive,* qui valait 3 pieds cubes, et se divisait en 6 pieds, le pied en 12 pouces, le pouce en 12 lignes. On la divisait aussi en 432 chevilles de 12 pouces cubes. La *somme* valait 8 solives. Pour le bois à brûler, l'unité était la *corde d'ordonnance,* dite aussi *des eaux et forêts,* qui valait 2 voies ou 112 pieds cubes.

(*) La piastre d'argent mexicaine a une grande circulation dans plusieurs États d'Amérique, d'Asie et même d'Afrique.

L'unité pour les liquides était le *muid*, qui se divisait en 2 feuillettes ou 3 tierçons ou 4 quartauts, le quartaut en 9 veltes, la velte en 4 quarts ou 8 pintes, la pinte en 2 chopines ou 8 possons ou 32 roquilles. La pinte contenait $46\frac{19}{20}$ pouces cubes.

L'unité pour les matières sèches était le *muid*, qui se divisait en 12 setiers, le setier en 2 mines ou 4 minots ou 12 boisseaux, le boisseau en 4 quarts ou 16 litrons, le litron en 16 mesurettes. Le litron contenait $40\frac{79}{80}$ pouces cubes.

L'unité de poids était la *livre*, dite *poids de marc*, qui se divisait en 2 marcs ou 16 onces, l'once en 8 gros ou drachmes, le gros en 3 deniers ou scrupules, le denier en 24 grains, le grain en 24 primes. Le quintal valait 100 livres; le last ou la charge, 3 quintaux; le millier, 10 quintaux ou 1000 livres.

Pour les métaux précieux, l'unité de poids était le *marc*, qui se divisait en 20 esterlins, l'esterlin en 2 mailles, la maille en 2 félins de $7\frac{1}{5}$ grains, poids de marc (*).

Dans la joaillerie, l'unité était le *carat* de 4 grains, valant chacun $3\frac{7}{8}$ grains, poids de marc, et se divisant en demis, quarts, huitièmes, seizièmes, trente-deuxièmes, soixante-quatrièmes.

L'unité de monnaie était la *livre tournois*, qui se divisait en 20 sous, le sou en 4 liards, le liard en 3 deniers. La livre tournois pesait 83 grains et était au titre de $\frac{11}{12}$.

Pour évaluer la finesse ou la pureté de l'or et de l'argent, on divisait l'or fin en 24 *carats* de 32 trente-deuxièmes, et l'argent fin en 12 *deniers* de 24 grains (**).

(*) Le *marc*, unité de poids pour les métaux précieux, était, en France, identique au *marc*, moitié de la livre de commerce.

(**) Ainsi l'or pur est à 24 carats; et l'or à 18 carats, par exemple, est celui qui renferme 18 parties d'or fin et 6 d'alliage, ou, en d'autres termes, est au titre de $\frac{18}{24}$ ou 0·750. De même, l'argent pur est à 12 deniers; et l'argent à 9 deniers, par exemple, est celui qui renferme 9 parties d'argent fin et 3 d'alliage, ou, en d'autres termes, est au titre de $\frac{9}{12}$ ou 0·750.

Les mots *carat* et *denier*, employés pour désigner le titre de l'or et de l'argent, ne sont pas des poids déterminés, mais simplement l'équivalent des fractions $\frac{1}{24}$ et $\frac{1}{12}$, comme le mot *millième* est l'équivalent de la fraction $\frac{1}{1000}$ (**447** et **462**).

456. On a, entre les anciennes mesures de France et les mesures métriques, les relations fondamentales suivantes :

1° 5 130 740 toises égalent 10 000 000^{m} (d'après MÉCHAIN et DELAMBRE);

2° 1 kilogramme égale 18827·15 grains (d'après LEFÈVRE-GINEAU);

3° 81 livres tournois valent 80^{f} (d'après la loi du 13 vendémiaire an VIII).

On déduit, de ces données, les tables suivantes de conversion des anciennes mesures de France en mesures métriques, et *vice versa* :

Livre tournois.	0·987 654^{f}	Toise cube.	7·403 890^{m3}
Toise.	1·949 037^{m}	Pied cube	0·034 277^{m3}
Pied	0·324 839^{m}	Solive	0·102 832^{m}
Pouce	0·027 070^{m}	Voie	1·919 527^{t}
Aune.	1·188 446^{m}	Muid, pour les liquides. . .	268·219 639^{l}
Toise carrée	3·798 744^{m2}	Pinte.	0·931 319^{l}
Pied carré	0·105 521^{m2}	Muid, pr les matières sèches.	1873·252 811^{l}
Arpent de Paris	34·188 693^{a}	Litron	0·813 044^{l}
Arpent commun	42·208 263^{a}	Livre poids de marc. . . .	489·505 847^{g}
Arpent d'ordonnance . . .	51·071 998^{a}	Carat.	0·205 820^{g}

Mètre . .	= 0·513 074 toise	Mètre cube .	= 0·135 064 toise cube
	= 3·078 444 pieds		= 29·173 852 pieds cubes
Mètre carré	= 0·263 245 toise carrée	Litre . . .	= 1·073 747 pinte
	= 9·476 817 pieds carrés		= 1·229 946 litron
Hectare. .	= 1·958 020 arpent de Paris	Kilogramme.	= 2·042 877 livres
	= 2·369 204 arpents communs		= 18827·15 grains
	= 2·924 944 arpents d'ordonnance	Franc. . .	= 1·0125 livre tournois

CHAPITRE VI

MESURES ANCIENNES DE BELGIQUE (*)

Monnaies.

457. En Belgique, les principales monnaies de compte étaient les suivantes :

1° Le *florin des Pays-Bas*, qui se divisait en 100 cents;

(*) Voir ma brochure intitulée *Mesures anciennes de Belgique*, troisième fascicule de mon *Recueil de Tables numériques*, Huy 1894.

2° Le *florin de Brabant,* qui se divisait en 20 sous, le sou en 4 liards ou 12 deniers;

3° Le *florin de Liége,* qui se divisait en 20 sous ou patars, le sou en 4 liards, le liard en 24 soz;

4° Le *florin de Luxembourg,* qui se divisait en 20 sous, le sou en 8 liards;

5° La *livre de Hainaut,* qui se divisait en 20 sous, le sou en 4 liards ou 12 deniers;

6° La *livre de gros*, qui se divisait en 20 sous ou escalins, l'escalin en 12 deniers;

7° La *livre tournois* de France, qui se divisait en 20 sous, le sou en 4 liards ou 12 deniers.

	Francs.
Florin des Pays-Bas (189 florins valent 400f)	2·116402
Florin de Brabant (441 florins valent 800f)	1·814059
Florin de Liége (27 florins valent 32f).	1·185185
Florin de Luxembourg (243 florins valent 400f)	1·646091
Livre de Hainaut (441 livres valent 400f)	0·907029
Livre de gros (6 florins des Pays-Bas ou 7 florins de Brabant)	12·698413
Livre tournois (81 livres tournois valent 80f)	0·987654

Mesures de longueur.

***458.** L'unité principale de longueur était la *toise* de 6 *pieds.*

A Liége, Louvain, Namur, Nivelles, dans le Hainaut et le Luxembourg, le pied se divisait en 10 pouces, le pouce en 10 lignes, la ligne en 10 points.

A Anvers, Bruges, Malines, le pied était de 11 pouces, le pouce de 11 lignes.

A Bruxelles, le pied était de 11 pouces, le pouce de 8 lignes.

	Millimètres.		Millimètres.
Pied de Bruxelles . .	275·75	Pied de Liége, dit de Saint-Lambert	291·779
Pied de Louvain . . .	285·512	Pied de Liége, dit de Saint-Hubert.	294·697
Pied du Hainaut . . .	293·43	Pied de Namur, dit de Saint-Lambert	294·763
Pied de Tournai . . .	297·769	Pied de Lukembourg, dit de Saint-Lambert . .	295·138

Pour les étoffes, l'unité était l'*aune* de 4 quartes ou 16 tailles.

L'aune de Brabant, de 2^{pi} 5^{po} 6^{l} ou 222^{l} de Bruxelles, valait $695·642^{mm}$.

L'aune de Liége, de 2^{pi} 2^{po} 5^{l} ou 225^{l} de Saint-Hubert, valait $663·067^{mm}$.

Mesures agraires.

***459.** L'unité principale des mesures agraires était le *bonnier*.

A Anvers, Bruxelles, Louvain, Malines, Namur, Nivelles, le bonnier était de 4 journaux ou 400 verges carrées; dans le Hainaut, de 3 ou 4 journels ou 300, 400, 432, 450 verges carrées; à Liége, de 4 journaux ou 20 verges grandes ou 400 verges petites; à Tournai et à Courtrai, de 4 journaux ou 16 cents de terre ou 400 verges grandes ou 1600 verges petites; à Gand, de 3 arpents ou 900 verges carrées.

Dans le Luxembourg, le journal était de 160 verges carrées.

A Bruges, Furnes, Ypres, la *mesure* était de 3 lignes ou 300 verges carrées.

	LONGUEUR DU PIED en millimètres	CÔTÉ DE LA VERGE CARRÉE en pieds	VALEUR DE LA VERGE CARRÉE en pieds carrés	NOMBRE DE VERGES au bonnier	VALEUR DU BONNIER en ares
ANVERS	286·8	20	400	400	131·606 784
BRUXELLES	275·75	16 $\frac{1}{3}$	266 $\frac{7}{9}$	400	81·141 061
BRUXELLES	275·75	17 $\frac{1}{3}$	300 $\frac{4}{9}$	400	91·380 854
COURTRAI	297·59	20	400	400	141·695 693
GAND	275 $\frac{8}{7}$	14	196	900	133·679 844
LIÉGE	291·779	16	256	400	87·178 135
LOUVAIN	285·512	20	400	400	130·427 363
MALINES	279·52	20	400	400	125·010 289
MONS	293·43	18·45	340·4025	432	126·615 104
NAMUR	294·763	16 $\frac{1}{2}$	272 $\frac{1}{4}$	400	94·618 011
NIVELLES	277 09	16 $\frac{1}{2}$	272 $\frac{1}{4}$	400	83·612 187
TOURNAI	297·769	18 $\frac{9}{11}$	330 $\frac{70}{121}$	400	117·245 174
					JOURNAL
LUXEMBOURG	295·138	16	256	160	35·678 720
					MESURE
BRUGES	274 $\frac{8}{7}$	14	196	300	44·236 800
FURNES	272 $\frac{6}{7}$	14	196	300	43·777 200
YPRES	273 $\frac{6}{7}$	14	196	300	44·098 668

Mesures de capacité.

***460.** L'unité principale des mesures de capacité pour les liquides était l'*aime* ou la *tonne*.

A Anvers, l'aime pour les liquides en général était de 50 stoop ou 100 pots. L'aime pour l'huile ordinaire était de 4 emmers ou seaux, l'emmer de 6 schreve, le schreve de 4 pots.

A Bruxelles, l'aime pour le vin et les liquides en général était de 24 schreef ou marques, le schreef de 2 geltes ou lots, le gelte de 2 pots. L'aime pour la bière était de 50 stoop ou 100 pots. L'aime pour le vin, de 96 pots, était égale à l'aime pour la bière, de 100 pots. Le foudre valait 6 aimes.

A Liége, l'aime valait $1\frac{1}{2}$ tonne; la tonne était de 90 pots. Le pot valait 50 pouces cubes de Saint-Hubert.

A Namur, l'aime valait $1\frac{1}{3}$ tonne; la tonne était de 90 pots.

A Mons, la tonne était de 80 pots.

Dans le Luxembourg, l'aime était de 4 hottes ou 100 pots.

	Litres.		Litres.
Pot d'ANVERS	1·374	Pot de LUXEMBOURG	1·584
Pot d'ANVERS, pour l'huile	1·389	Pot de MALINES	1·373
Pot de BRUXELLES, pour le vin	1·354	Pot de MONS	2·038
Pot de BRUXELLES, pour la bière	1·300	Pot de NAMUR	1·419
Pot de LIÉGE	1·280	Pot de TOURNAI, pour la bière	2·406
Pot de LOUVAIN, pour le vin	1·806	Canette de TOURNAI, pour le vin	0·788
Pot de LOUVAIN, pour la bière	1·312	Livre de TOURNAI, pour l'huile	0·476

***461.** L'unité principale des mesures de capacité pour les matières sèches était le *muid*.

A Bruxelles, Mons, Nivelles, le muid était de 6 rasières, la rasière de 2 halsters ou boisseaux ou vasseaux, ou de 4 viertels ou quartiers.

A Liége et à Namur, le muid était de 8 setiers, le setier de 4 quartes. Le setier de Liége valait 24 pots ou 1200 pouces cubes de Saint-Hubert.

A Louvain, le muid était de 8 halsters ou boisseaux, le boisseau de 2 molevat, ou de 4 viertels ou quartiers.

A Gand, le muid était de 6 sacs, le sac de 2 halsters ou boisseaux.

A Bruges, le *hoed* était de 4 mesures, la mesure de 4 quartes.

Dans le Luxembourg, le *maldre* était de 2 sacs ou 10 bichets.

	Litres.		Litres.		Litres.
Muid de BRUXELLES .	292·55	Muid de NAMUR . .	241·88	Viertel d'ANVERS . .	76·94
Muid de MONS . . .	320·32	Muid de LOUVAIN .	233·91	Viertel de MALINES .	86·50
Muid de NIVELLES . .	243·84	Muid de GAND . .	633·86	Hoed de BRUGES . .	166·61
Muid de LIÉGE . . .	245·70	Sac de COURTRAI .	126·42	Maldre de LUXEMBOURG	204·70

Poids.

462. L'unité de poids était la *livre*, et on distinguait la *livre de commerce*, la *livre médicale* et la *livre d'orfèvrerie*.

1° La *livre de commerce* était de 16 onces.

A Anvers, Bruges, Courtrai, l'once se divisait en 16 mains ou seizièmes; à Bruxelles, Liége, Louvain, Namur, en 8 gros de 72 grains; à Malines, en 20 engels ou esterlins, l'esterlin en 32 grains; à Mons et à Tournai, en 32 trente-deuxièmes, le trente-deuxième en 20 grains.

	Grammes		Grammes.		Grammes.
ANVERS	470·173	GAND	433·839	MALINES.	469·245
BRUGES	463·900	LIÉGE.	467·093	MONS.	465·542
BRUXELLES. . . .	467·670	LOUVAIN	469·245	NAMUR	466·373
COURTRAI	431·035	LUXEMBOURG . .	495·164	TOURNAI.	430·637

2° La *livre médicale* était de 12 onces, l'once de 8 drachmes ou gros, la drachme de 3 scrupules ou deniers, le scrupule de 20 grains.

Elle valait 9 onces de Paris, ou 275^{g}·347^{g}.

3° La *livre poids de marc* ou *d'orfèvrerie* était de 2 marcs ou 16 onces.

A Liége, l'once se divisait en 20 esterlins, l'esterlin en 32 as; à Mons, en 20 esterlins, l'esterlin en 4 ferlins, le ferlin en 8 grains.

	Grammes.		Grammes.
Livre poids de marc de LIÉGE . .	492·056	Livre TROYE de Hollande	492·152
Livre poids de marc de MONS. . .	491·762	Livre de PARIS	489·506

Pour évaluer la finesse ou la pureté de l'or et de l'argent, on divisait l'or fin en 24 *carats* de 12 grains, et l'argent fin en 12 *deniers* de 24 grains (**455**).

Système métrique (anciennes dénominations).

463. Le système décimal des poids et mesures a été adopté dans le royaume des Pays-Bas, comprenant la Belgique et la Hollande, par la loi du 21 août 1816, pour être mis en vigueur à partir du 1er janvier 1820, sous les dénominations suivantes :

MESURES DE LONGUEUR : le *mille* (kilomètre), la *perche* (décamètre), l'*aune* (mètre), le *palme* (décimètre), le *pouce* (centimètre), la *ligne* (millimètre);

MESURES AGRAIRES : le *bonnier* (hectare), la *perche carrée* (are), l'*aune carrée* (centiare);

MESURE POUR LE BOIS DE CHAUFFAGE : la *corde* (stère);

MESURES DE CAPACITÉ POUR LES LIQUIDES : le *baril* (hectolitre), le *litron* (litre), le *verre* (décilitre), le *dé* (centilitre);

MESURES DE CAPACITÉ POUR LES MATIÈRES SÈCHES : la *rasière* ou le *sac* (hectolitre), le *boisseau* (décalitre), le *litron* (litre), la *mesurette* (décilitre);

POIDS : la *livre* (kilogramme), l'*once* (hectogramme), le *gros* (décagramme), l'*esterlin* (gramme), le *grain* (décigramme).

La *livre médicale* fut fixée à 375 grammes ou esterlins par l'arrêté du 30 novembre 1817.

En Belgique, la loi du 18 juin 1836 rendit obligatoire, à partir du 1er août 1836, l'emploi des dénominations *systématiques* au lieu des dénominations vulgaires.

CHAPITRE VII

CALCUL DES NOMBRES COMPLEXES

464. On appelle *nombres complexes* ceux qui sont composés de plusieurs collections d'unités différentes de la même espèce de grandeur, ces unités différentes étant des parties quelconques, *autres que décimales*, les unes des autres. Tels sont les nombres $4^h\ 18^m\ 30^s$, $25°\ 37'\ 9''$.

On appelle *nombres incomplexes* tous autres nombres entiers ou décimaux ou fractionnaires.

Conversion d'un nombre complexe en nombre incomplexe et vice versa.

465. *Convertir le nombre* $5^j\ 13^h\ 20^m$ *en un nombre incomplexe.*

Il suffit de rapporter le nombre $5^j\ 13^h\ 20^m$ à l'une quelconque des unités de temps.

Pour le rapporter à la minute, on dira :

Puisque 1^j vaut 24^h, 5^j valent 5 fois 24^h ou 120^h, et $5^j\ 13^h$ valent $120^h + 13^h$ ou 133^h.

Puisque 1^h vaut 60^m, 133^h valent 133 fois 60^m ou 7980^m, et $5^j\ 13^h\ 20^m$ valent $7980^m + 20^m$ ou 8000^m.

Ainsi le nombre complexe $5^j\ 13^h\ 20^m$ est équivalent au nombre entier $\mathbf{8000^m}$.

Pour rapporter le même nombre à l'heure, on dira :

$5^j\ 13^h\ 20^m$ valent 8000^m. Or 1^h vaut 60^m. Donc le rapport de $5^j\ 13^h\ 20^m$ à l'heure est $\frac{8000}{60}$ ou $\frac{400}{3}$.

Ainsi le nombre complexe $5^j\ 13^h\ 20^m$ est équivalent à l'expression fractionnaire $\frac{\mathbf{400}^h}{\mathbf{3}}$.

Pour rapporter le même nombre au jour, on dira :

$5^j\ 13^h\ 20^m$ valent 8000^m. Or 1^j vaut 24^h ou 24 fois 60^m ou 1440^m. Donc le rapport de $5^j\ 13^h\ 20^m$ au jour est $\frac{8000}{1440}$ ou $\frac{50}{9}$.

Ainsi le nombre complexe $5^j\ 13^h\ 20^m$ est équivalent à l'expression fractionnaire $\frac{\mathbf{50}^j}{\mathbf{9}}$.

Dans la pratique, on ne passe pas toujours par la réduction en unités inférieures. Ainsi, pour rapporter le nombre $5^j\ 13^h\ 20^m$ au jour, on peut dire :

$$5^j\ 13^h\ 20^m = 5^j + 13\tfrac{1}{3}^h = 5^j + \frac{13\frac{1}{3}^j}{24} = \mathbf{5}\frac{5^j}{9}.$$

466. *Convertir la fraction* $\frac{32}{25}^j$ *en jours, heures, minutes et secondes.*

La fraction $\frac{32}{25}^j$ est égale à la 25e partie de 32^j (**210**). On dira donc :

La 25e partie de 32^j est 1^j, et il reste 7^j ou 7 fois 24^h ou 168^h. La 25e partie de 168^h est 6^h, et il reste 18^h ou 18 fois 60^m ou 1080^m. La 25e partie de 1080^m est 43^m, et il reste 5^m ou 5 fois 60^s ou 300^s. Enfin, la 25e partie de 300^s est 12^s.

Ainsi la fraction $\frac{32^j}{25}$ est équivalente au nombre complexe $1^j\ 6^h\ 43^m\ 12^s$.

32^j				25
25				$1^j\ 6^h\ 43^m\ 12^s$
7	168^h			
	150			
	18	1080^m		
		100		
		80		
		75		
		5	300^s	
			25	
			50	
			50	
			0	

467. Pour effectuer toute espèce d'opérations sur les nombres complexes, on peut opérer sur les nombres incomplexes équivalents (**465**), sauf à convertir, s'il y a lieu, les résultats en nombres complexes (**466**). Mais il existe des procédés particuliers qui permettent, dans la plupart des cas, d'opérer d'une façon plus commode.

Addition et soustraction des nombres complexes.

468. *Faire la somme des nombres* $5^j\ 9^h\ 28^m\ 32^s$, $2^j\ 21^h\ 51^m\ 15^s$, $4^j\ 18^h\ 57^m\ 10^s$.

Pour faire la somme de ces nombres, on peut faire séparément la somme des secondes, celle des minutes, celle des heures et celle des jours qui les composent.

5^j	9^h	28^m	32^s
2	21	51	15
4	18	57	10
13	**2**	**16**	**57**

La somme des secondes est $\mathbf{57^s}$, que l'on écrit sous la colonne des secondes.

La somme des minutes est 136^m, que l'on divise par 60 pour les convertir en heures : le quotient est 2^h et le reste 16^m; on écrit les $\mathbf{16^m}$ sous la colonne des minutes, et on reporte les 2^h à la colonne des heures.

La somme des heures est 50^h, que l'on divise par 24 pour les convertir en jours : le quotient est 2^j et le reste 2^h; on écrit les $\mathbf{2^h}$ sous la colonne des heures, et on reporte les 2^j à la colonne des jours.

La somme des jours est $\mathbf{13^j}$, que l'on écrit sous la colonne des jours.

La somme cherchée est $\mathbf{13^j\ 2^h\ 16^m\ 57^s}$.

469. *Trouver la différence des nombres* $5^j\,9^h\,28^m\,32^s$, $2^j\,21^h\,51^m\,15^s$.

Pour avoir la différence de ces deux nombres, on peut prendre séparément la différence des secondes, celle des minutes, celle des heures et celle des jours qui les composent.

5^j	9^h	28^m	32^s
2	21	51	15
2	**11**	**37**	**17**

15^s ôtées de 32^s, il reste $\mathbf{17^s}$.

Oter 51^m de 28^m, cela ne se peut. Pour rendre la soustraction possible, on augmente les 28^m d'une heure ou 60^m, ce qui donne 88^m, et on dit : 51^m ôtées de 88^m, il reste $\mathbf{37^m}$.

Pour ne pas altérer la différence, on augmente d'une heure la quantité à soustraire (**28**), et on dit : 22^h de 9^h, cela ne se peut encore. On augmente les 9^h d'un jour ou 24^h, ce qui donne 33^h, et on dit : 22^h de 33^h, il reste $\mathbf{11^h}$.

Pour ne pas altérer la différence, on augmente d'un jour la quantité à soustraire, et on dit : 3^j de 5^j, il reste $\mathbf{2^j}$.

La différence cherchée est $\mathbf{2^j\ 11^h\ 37^m\ 17^s}$.

Multiplication et division des nombres complexes.

470. *Multiplier le nombre* $5^j\ 9^h\ 28^m\ 32^s$ *par le nombre entier* 7.

Pour multiplier le nombre $5^j\ 9^h\ 28^m\ 32^s$ par 7, il suffit de multiplier par 7 chacune des parties de ce nombre et de faire la somme des produits obtenus (**39**). On dira donc :

5^j	9^h	28^m	32^s
			7
37	**18**	**19**	**44**

7 fois 32^s font 224^s, que l'on divise par 60 pour les convertir en minutes : le quotient est 3^m, que l'on retient, et le reste $\mathbf{44^s}$, que l'on écrit au produit.

7 fois 28^m font 196^m, et 3^m de retenue, font 199^m, que l'on divise par 60 pour les convertir en heures : le quotient est 3^h, que l'on retient, et le reste **19^m**, que l'on écrit au produit.

7 fois 9^h font 63^h, et 3^h de retenue, font 66^h, que l'on divise par 24 pour les convertir en jours : le quotient est 2^j, que l'on retient, et le reste **18^h**, que l'on écrit au produit.

7 fois 5^j font 35^j, et 2^j de retenue, font **37^j**, que l'on écrit au produit.

Le produit cherché est **37^j 18^h 19^m 44^s**.

471. *Diviser le nombre* 37^j 18^h 19^m 44^s *par le nombre entier* 7.

Pour diviser le nombre 37^j 18^h 19^m 44^s par 7, on dira :

37^j	18^h	19^m	44^s	7
35				**5^j 9^h 28^m 32^s**
2	66			
	63			
	3	199		
		14		
		59		
		56		
		3	224	
			21	
			14	
			14	
			0	

La 7e partie de 37^j est **5^j**, et il reste 2^j ou 2 fois 24^h ou 48^h, qui, augmentées des 18^h du dividende, donnent 66^h.

La 7e partie de 66^h est **9^h**, et il reste 3^h ou 3 fois 60^m ou 180^m, qui, augmentées des 19^m du dividende, donnent 199^m.

La 7e partie de 199^m est **28^m**, et il reste 3^m ou 3 fois 60^s ou 180^s, qui, augmentées des 44^s du dividende, donnent 224^s.

Enfin, la 7e partie de 224^s est **32^s**.

On a ainsi divisé par 7 chacune des parties du nombre 35^j 63^h 196^m 224^s, lequel est égal au nombre donné 37^j 18^h 19^m 44^s : donc **5^j 9^h 28^m 32^s** est le quotient cherché.

472. *Multiplier ou diviser le nombre* 5^j 13^h 20^m *par la fraction* $\frac{5}{8}$.

Multiplier un nombre par $\frac{5}{8}$, c'est prendre 5 fois la huitième partie

de ce nombre (**231**), ce qui revient à le multiplier par 5 et à diviser le produit obtenu par 8. Le produit de $5^j\ 13^h\ 20^m$ par 5 est $27^j\ 18^h\ 40^m$ (**470**), et le quotient de $27^j\ 18^h\ 40^m$ par 8 est $3^j\ 11^h\ 20^m$ (**471**). Le produit cherché est donc $\mathbf{3^j\ 11^h\ 20^m}$.

Pour diviser le nombre $5^j\ 13^h\ 20^m$ par la fraction $\frac{5}{8}$, on le multiplie par cette fraction renversée (**244**). Le quotient est $\mathbf{8^j\ 21^h\ 20^m}$.

Si le multiplicateur ou le diviseur est un nombre décimal, on le mettra sous la forme d'une fraction ordinaire (**270**).

473. *Trouver le rapport de* $5^j\ 13^h\ 20^m$ *à* $1^j\ 6^h\ 43^m\ 12^s$.

Le nombre $5^j\ 13^h\ 20^m$ est égal à $480\,000^s$, et le nombre $1^j\ 6^h\ 43^m\ 12^s$ est égal à $110\,592^s$. Le rapport de $5^j\ 13^h\ 20^m$ à $1^j\ 6^h\ 43^m\ 12^s$ est donc $\frac{480\,000}{110\,592}$ ou $\frac{625}{144}$.

474. *Multiplier* $5^l\ 8^s$ *par le rapport du nombre* $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$ *à la toise.*

(Cette opération résout le problème suivant : *Si l'on paie* $5^l\ 8^s$ *pour la toise, combien paiera-t-on pour* $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$?)

On sait (**455**) que la livre tournois (^{l}) vaut 20 sous (^{s}), le sou 12 deniers (^{d}); que la toise (^{t}) se divise en 6 pieds (^{pi}), le pied en 12 pouces (^{po}), le pouce en 12 lignes (^{l}), la ligne en 12 points (^{pt}).

Le nombre $5^l\ 8^s$ est égal à $5\frac{8}{20}^l$ ou à $\frac{27}{5}^l$. Le nombre $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$ étant égal à 2398^l et la toise à 864^l, le rapport du nombre $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$ à la toise est $\frac{2398}{864}$ ou $\frac{1199}{432}$. On multipliera donc $\frac{27}{5}^l$ par $\frac{1199}{432}$, ce qui donne $\frac{1199}{80}^l$ ou (**466**) $\mathbf{14^l\ 19^s\ 9^d}$.

475. *Multiplier* $5^l\ 8^s$ *par le rapport du nombre* $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$ *au pied.*

(Cette opération résout le problème suivant : *Si l'on paie* $5^l\ 8^s$ *pour le pied, combien paiera-t-on pour* $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$?)

Le nombre $5^l\ 8^s$ est égal à $5\frac{8}{20}^l$ ou à $\frac{27}{5}^l$. Le nombre $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$ étant égal à 2398^l et le pied à 144^l, le rapport du nombre $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$ au pied est $\frac{2398}{144}$ ou $\frac{1199}{72}$. On multipliera donc $\frac{27}{5}^l$ par $\frac{1199}{72}$, ce qui donne $\frac{3597}{40}^l$ ou (**466**) $\mathbf{89^l\ 18^s\ 6^d}$.

476. *Trouver la surface d'un rectangle ayant* $84^t\ 5^{pi}\ 6^{po}$ *de longueur et* $45^t\ 4^{pi}\ 9^{po}$ *de largeur.*

On sait (**455**) que la toise (^{t}) vaut 6 pieds (^{pi}), le pied 12 pouces (^{po}), le pouce 12 lignes (^{l}), la ligne 12 points (^{pt}).

On sait aussi que la toise carrée ($^{t^2}$), le pied carré ($^{pi^2}$), le pouce carré ($^{po^2}$), la ligne carrée ($^{l^2}$), le point carré ($^{pt^2}$) sont des carrés ayant respectivement pour côté la toise, le pied, le pouce, la ligne, le point.

La toise carrée, étant un carré de 6 pieds de côté, vaut 6×6 ou 36^{pi^2}. Le pied carré, étant un carré de 12 pouces de côté, vaut 12×12 ou 144^{po^2}. Le pouce carré vaut, de même, 144^{l^2}, et la ligne carrée vaut 144^{pt^2}.

Cela posé, les nombres $84^{t}\,5^{pi}\,6^{po}$ et $45^{t}\,4^{pi}\,9^{po}$ sont égaux respectivement à 6114^{po} et 3297^{po} (**465**). La surface du rectangle égale donc 6114×3297 ou $20\,157\,858^{po^2}$ ou (**466**) $\mathbf{3888^{t^2}\,17^{pi^2}\,18^{po^2}}$.

477. *Trouver le volume d'un parallélépipède rectangle ayant* $4^{t}\,5^{pi}\,7^{po}$ *de longueur,* $3^{t}\,4^{pi}\,6^{po}$ *de largeur et* $2^{t}\,3^{pi}\,4^{po}$ *de hauteur.*

On sait que la toise cube ($^{t^3}$), le pied cube ($^{pi^3}$), le pouce cube ($^{po^3}$), la ligne cube ($^{l^3}$), le point cube ($^{pt^3}$) sont des cubes ayant respectivement pour arête la toise, le pied, le pouce, la ligne, le point.

La toise cube, étant un cube de 6 pieds d'arête, vaut $6 \times 6 \times 6$ ou 216^{pi^3}. Le pied cube, étant un cube de 12 pouces d'arête, vaut $12 \times 12 \times 12$ ou 1728^{po^3}. Le pouce cube vaut, de même, 1728^{l^3}, et la ligne cube vaut 1728^{pt^3}.

Cela posé, les nombres $4^{t}\,5^{pi}\,7^{po}$, $3^{t}\,4^{pi}\,6^{po}$ et $2^{t}\,3^{pi}\,4^{po}$ sont égaux respectivement à 355^{po}, 270^{po} et 184^{po} (**465**). Le volume du parallélépipède rectangle égale donc $355 \times 270 \times 184$ ou $17\,636\,400^{po^3}$ ou (**466**) $\mathbf{47^{t^3}\,54\tfrac{1}{4}^{pi^3}}$.

CHAPITRE VIII

MÉTHODE DES PARTIES ALIQUOTES

478. Le produit d'un nombre complexe par un grand nombre, ou d'un nombre complexe par un autre nombre complexe, s'obtient souvent très simplement par la *méthode des parties aliquotes* (**116** et **236**), c'est-à-dire

en décomposant, dans le premier cas, le multiplicande, et, dans le second cas, le multiplicateur, *en parties aliquotes de l'unité immédiatement supérieure,* ou *sous-multiples les unes des autres.*

479. *Multiplier le nombre* $5^j\ 9^h\ 28^m\ 32^s$ *par* 427.

Pour multiplier le nombre $5^j\ 9^h\ 28^m\ 32^s$ par 427, on multiplie par 427 chacune des parties de ce nombre et on fait la somme des produits obtenus.

$5^j\ 9^h\ 28^m\ 32^s$
427

Produit par 427 de 5^j		5^j . . . 5 fois 427	2135^j			
»	de 9^h	8^h ou $\frac{1}{3}^j\ \frac{1}{3}$ de 427.	142	8^h		
		1 . . . $\frac{1}{8}$ du produit précédent	17	19		
»	de 28^m	20^m ou $\frac{1}{3}^h\ \frac{1}{3}$ du produit précédent	5	22	20^m	
		4 . . . $\frac{1}{5}$ du produit précédent	1	4	28	
		4 . . . $\frac{1}{5}$ du même.	1	4	28	
»	de 32^s	30^s ou $\frac{1}{2}^m\ \frac{1}{8}$ du produit précédent		3	33	30^s
		2 . . . $\frac{1}{15}$ du produit précédent			14	14
			2303	**14**	**3**	**44**

Le produit de 5^j par 427 est $\mathbf{2135^j}$.

Pour multiplier 9^h par 427, on décompose 9^h en $8^h + 1^h$. 8^h sont le tiers de 24^h ou 1^j : donc le produit de 8^h par 427 est le tiers du produit de 1^j par 427, ou le tiers de 427^j, ou $\mathbf{142^j\ 8^h}$. 1^h est le $\frac{1}{8}$ de 8^h : donc le produit de 1^h par 427 est le $\frac{1}{8}$ du produit précédent $142^j\ 8^h$, ou $\mathbf{17^j\ 19^h}$.

Pour multiplier 28^m par 427, on décompose 28^m en $20^m + 4^m + 4^m$. 20^m sont le tiers de 60^m ou 1^h : donc le produit de 20^m par 427 est le tiers du produit précédent $17^j\ 19^h$, ou $\mathbf{5^j\ 22^h\ 20^m}$. 4^m sont le $\frac{1}{5}$ de 20^m : donc le produit de 4^m par 427 est le $\frac{1}{5}$ du produit précédent $5^j\ 22^h\ 20^m$, ou $\mathbf{1^j\ 4^h\ 28^m}$. On écrit une deuxième fois ce dernier produit au-dessous de lui-même.

Pour multiplier 32^s par 427, on décompose 32^s en $30^s + 2^s$. 30^s sont la moitié de 60^s ou 1^m, ou le $\frac{1}{8}$ de 4^m : donc le produit de 30^s par 427 est le $\frac{1}{8}$ du produit précédent $1^j\ 4^h\ 28^m$, ou $\mathbf{3^h\ 33^m\ 30^s}$. 2^s sont le $\frac{1}{15}$ de 30^s : donc le produit de 2^s par 427 est le $\frac{1}{15}$ du produit précédent $3^h\ 33^m\ 30^s$, ou $\mathbf{14^m\ 14^s}$.

Faisant la somme des produits partiels, on trouve **2303^{j} 14^{h} 3^{m} 44^{s}** pour le produit demandé.

***480.** *Multiplier* 5^{l} 8^{s} *par le rapport du nombre* 2^{t} 4^{pi} 7^{po} 10^{l} *à la toise.*

Pour multiplier 5^{l} 8^{s} par le rapport du nombre 2^{t} 4^{pi} 7^{po} 10^{l} à la toise, on multiplie 5^{l} 8^{s} par le rapport de chacune des parties de ce nombre à la toise et on fait la somme des produits obtenus.

			5^{l} 8^{s}		
			2^{t} 4^{pi} 7^{po} 10^{l} : 1^{t}		
Produit par 2^{t} : 1^{t}	2^{t} . . . 2 fois 5^{l} 8^{s}		10^{l}	16^{s}	
» par 4^{pi} : 1^{t}	3^{pi} ou $\frac{1}{2}$^{t} $\frac{1}{2}$ de 5^{l} 8^{s}.		2	14	
	1. . . . $\frac{1}{3}$ du prod^{t} précédent			18	
» par 7^{po} : 1^{t}	6^{po} ou $\frac{1}{2}$^{pi} $\frac{1}{2}$ du prod^{t} précédent			9	
	1. . . . $\frac{1}{6}$ du prod^{t} précédent			1	6^{d}
» par 10^{l} : 1^{t}	4^{l} ou $\frac{1}{3}$^{po} $\frac{1}{3}$ du prod^{t} précédent				6
	4. . . . $\frac{1}{3}$ du même				6
	2. . . . $\frac{1}{2}$ du prod^{t} précédent				3
			14	**19**	**9**

Le produit de 5^{l} 8^{s} par le rapport de 2^{t} à la toise ou par 2 est **10^{l} 16^{s}**.

Pour multiplier 5^{l} 8^{s} par le rapport de 4^{pi} à la toise ou à 6^{pi}, on décompose 4^{pi} en 3^{pi} + 1^{pi}. 3^{pi} sont la moitié d'une toise : donc le produit de 5^{l} 8^{s} par le rapport de 3^{pi} à la toise est la moitié de 5^{l} 8^{s}, ou **2^{l} 14^{s}**. 1^{pi} est le tiers de 3^{pi} : donc le produit de 5^{l} 8^{s} par le rapport de 1^{pi} à la toise est le tiers du produit précédent 2^{l} 14^{s}, ou **18^{s}**.

Pour multiplier 5^{l} 8^{s} par le rapport de 7^{po} à la toise, on décompose 7^{po} en 6^{po} + 1^{po}. 6^{po} sont la moitié de 12^{po} ou 1^{pi} : donc le produit de 5^{l} 8^{s} par le rapport de 6^{po} à la toise est la moitié du produit précédent 18^{s}, ou **9^{s}**. 1^{po} est le $\frac{1}{6}$ de 6^{po} : donc le produit de 5^{l} 8^{s} par le rapport de 1^{po} à la toise est le $\frac{1}{6}$ du produit précédent 9^{s}, ou **1^{s} 6^{d}**.

Pour multiplier 5^{l} 8^{s} par le rapport de 10^{l} à la toise, on décompose 10^{l} en 4^{l} + 4^{l} + 2^{l}. 4^{l} sont le tiers de 12^{l} ou 1^{po} : donc le produit de 5^{l} 8^{s} par le rapport de 4^{l} à la toise est le tiers du produit précédent 1^{s}6^{d}, ou **6^{d}**.

On écrit une deuxième fois ce dernier produit au-dessous de lui-même. 2^l sont la moitié de 4^l : dont le produit $5^l\ 8^s$ par le rapport de 2^l à la toise est la moitié du produit précédent 6^d, ou **3^d**.

Faisant la somme des produits partiels, on trouve **$14^l\ 19^s\ 9^d$** pour le produit demandé.

***481.** *Multiplier $5^l\ 8^s$ par le rapport du nombre $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$ au pied.*

Le nombre $2^t\ 4^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$ est égal à $16^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$.

Pour multiplier $5^l\ 8^s$ par le rapport du nombre $16^{pi}\ 7^{po}\ 10^l$ au pied, on multiplie $5^l\ 8^s$ par le rapport de chacune des parties de ce nombre au pied et on fait la somme des produits obtenus.

		5^l	8^s	
		$16^{pi}\ 7^{po}\ 10^l : 1^{pi}$		
Produit par $16^{pi} : 1^{pi}$	16^{pi}. . . . 16 fois $5^l\ 8^s$	86^l	8^s	
» par $7^{po} : 1^{pi}$	6^{po} ou $\frac{1}{2}^{pi}$ $\frac{1}{2}$ de $5^l\ 8^s$.	2	14	
	1 . . . . $\frac{1}{6}$ du produit précédent		9	
» par $10^l : 1^{pi}$	4^l ou $\frac{1}{3}^{po}$ $\frac{1}{3}$ du produit précédent		3	
	4 . . . . $\frac{1}{3}$ du même		3	
	2 . . . . $\frac{1}{2}$ du produit précédent		1	6^d
		89	**18**	**6**

Le produit de $5^l\ 8^s$ par le rapport de 16^{pi} au pied ou par 16 est **$86^l\ 8^s$**.

Pour multiplier $5^l\ 8^s$ par le rapport de 7^{po} au pied ou à 12^{po}, on décompose 7^{po} en $6^{po} + 1^{po}$. 6^{po} sont la moitié d'un pied : donc le produit de $5^l\ 8^s$ par le rapport de 6^{po} au pied est la moitié de $5^l\ 8^s$, ou **$2^l\ 14^s$**. 1^{po} est le $\frac{1}{6}$ de 6^{po} : donc le produit de $5^l\ 8^s$ par le rapport de 1^{po} au pied est le $\frac{1}{6}$ du produit précédent $2^l\ 14^s$, ou **9^s**.

Pour multiplier $5^l\ 8^s$ par le rapport de 10^l au pied, on décompose 10^l en $4^l + 4^l + 2^l$. 4^l sont le tiers de 12^l ou 1^{po} : donc le produit de $5^l\ 8^s$ par le rapport de 4^l au pied est le tiers du produit précédent 9^s, ou **3^s**. On écrit une deuxième fois ce dernier produit au-dessous de lui-même. 2^l sont la moitié de 4^l : donc le produit de $5^l\ 8^s$ par le rapport de 2^l au pied est la moitié du produit précédent 3^s, ou **$1^s\ 6^d$**.

Faisant la somme des produits partiels, on trouve **89^{l} 18^{s} 6^{d}** pour le produit demandé.

***482.** *Multiplier* 2^{l} 10^{s} *par le rapport du nombre* 1^{t} 5^{pi} 9^{l} *à la toise.*

			2^{l} 10^{s}		
			1^{t} 5^{pi} 9^{l} : 1^{t}		
Produit par 1^{t} : 1^{t}	1^{t}	1 fois 2^{l} 10^{s}	2^{l}	10^{s}	
» par 5^{pi} : 1^{t}	3^{pi} ou $\frac{1}{2}$^{t} .	$\frac{1}{2}$ du produit précédent	1	5	
	2^{pi} ou $\frac{1}{3}$^{t} .	$\frac{1}{3}$ du même.		16	8^{d}
		$\frac{2}{8}$^{pi}. $\frac{1}{8}$ du produit précédent		2	1
» par 9^{l} : 1^{t}	6^{l} ou $\frac{2}{48}$^{pi}.	$\frac{1}{6}$ du produit précédent			$4\frac{1}{6}$
	3	$\frac{1}{2}$ du produit précédent			$2\frac{1}{12}$
			4	**12**	**2$\frac{1}{4}$**

Dans cet exemple, on décompose 5^{pi} en 3^{pi} + 2^{pi}, et 9^{l} en 6^{l} + 3^{l}. Or 6^{l} sont le $\frac{1}{48}$ de 2^{pi}. Pour éviter la division par 48, on prend d'abord le $\frac{1}{8}$ du produit par 2^{pi}, ce qui donne 2^{s} 1^{d} (*); puis le $\frac{1}{6}$ de 2^{s} 1^{d}, ce qui donne $4\frac{1}{6}$^{d}.

Le produit cherché est **4^{l} 12^{s} 2$\frac{1}{4}$^{d}**.

***483.** *Trouver la surface d'un rectangle ayant* 284^{t} 5^{pi} 6^{po} *de longueur et* 137^{t} 4^{pi} 9^{po} *de largeur.*

Remarquons d'abord que l'on appelle *toise-toise* (^{tt}) ou *toise carrée* ($^{t^2}$), *toise-pied* (^{tpi}), *toise-pouce* (^{tpo}), *toise-ligne* (^{tl}), *toise-point* (^{tpt}), des rectangles ayant une toise de longueur, et, pour largeur, respectivement la toise, le pied, le pouce, la ligne, le point. On entend, de même, ce que signifient les expressions *pied-pouce, pied-ligne, pouce-ligne,* etc.

Il est évident que la toise carrée vaut 6 toise-pied (**); que la toise-pied vaut 12 toise-pouce; que la toise-pouce vaut 12 toise-ligne; que la toise-ligne vaut 12 toise-point; que le pied-pouce vaut 12 pied-ligne; etc.

Cela posé, si l'on conçoit un rectangle ayant 284^{t} 5^{pi} 6^{po} de longueur

(*) Le produit 2^{s} 1^{d} est ce qu'on appelle *faux produit* ou *produit auxiliaire.*

(**) J'écris 6 *toise-pied,* c'est-à-dire 6 rectangles ayant *une toise* de longueur et *un pied* de largeur.

et 1^t de largeur, ce rectangle sera égal à 284^{tt} 5^{tpi} 6^{tpo}. La largeur du rectangle étant 137^t 4^{pi} 9^{po}, on voit qu'il suffit de multiplier 284^{tt} 5^{tpi} 6^{tpo} par le rapport de 137^t 4^{pi} 9^{po} à la toise (**480**).

		284^{tt}	5^{tpi}	6^{tpo}	
		137^t	4^{pi}	9^{po} : 1	
Produit par 137^t : 1^t	284^{tt}. . . 137 fois 284^{tt}	1988^{tt}			
		852			
		284			
	3^{tpi} ou $\frac{1}{2}^{tt}$. $\frac{1}{2}$ de 137^{tt}.	68	3^{tpi}		
	2^{tpi} ou $\frac{1}{3}^{tt}$. $\frac{1}{3}$ de 137^{tt}.	45	4		
	6^{tpo} ou $\frac{1}{2}^{tpi}$. $\frac{1}{4}$ du produit précédent	11	2	6^{tpo}	
par 4^{pi} : 1^t	2^{pi} ou $\frac{1}{3}^t$. $\frac{1}{3}$ de 284^{tt} 5^{tpi} 6^{tpo}. . .	94	5	10	
	2 . . . . . $\frac{1}{3}$ du même	94	5	10	
par 9^{po} : 1^t	6^{po} ou $\frac{1}{2}^{pi}$. $\frac{1}{4}$ du produit précédent	23	4	5	6
	3 . . . . . $\frac{1}{2}$ du produit précédent	11	5	2	9
		39259	**0**	*10*	*3*

La surface du rectangle est **39259**^{tt} **10**^{tpo} **3**^{tl}, ou, en observant que la toise-pouce vaut 6 × $\frac{1}{12}$ ou $\frac{1}{2}$ pied carré, et que la toise-ligne vaut 72 × $\frac{1}{12}$ ou 6 pouces carrés, **39259**$^{t^2}$ **5**$^{pi^2}$ **18**$^{po^2}$.

***484.** *Trouver le volume d'un parallélépipède rectangle ayant* 4^t 5^{pi} 7 *de longueur,* 3^t 4^{pi} 6^{po} *de largeur et* 2^t 3^{pi} 4^{po} *de hauteur.*

Remarquons d'abord que l'on appelle *toise-toise-toise* (^{ttt}) ou *toise cube* ($^{t^3}$), *toise-toise-pied* (^{ttpi}), *toise-toise-pouce* (^{ttpo}), *toise-toise-ligne* (^{ttl}), *toise-toise-point* (^{ttpt}), des parallélépipèdes rectangles ayant une toise de longueur, une toise de largeur, et, pour hauteur, respectivement la toise, le pied, le pouce, la ligne, le point. On entend, de même, ce que signifient les expressions *toise-pied-pied, toise-pied-pouce, toise-pied-ligne,* etc.

Il est évident que la toise cube vaut 6 toise-toise-pied; que la toise-toise-pied vaut 12 toise-toise-pouce; que la toise-toise-pouce vaut 12 toise-toise-ligne; que la toise-toise-ligne vaut 12 toise-toise-point; etc.

Cela posé, la base du parallélépipède rectangle est égale à 4^t 5^{pi} 7 × 3^t 4^{pi} 6^{po} ou (**483**) à **18**^{tt} **2**^{tpi} **11**^{tpo} **3**^{tl}. Si l'on conçoit un parallélé-

pède ayant cette base et 1^t de hauteur, ce parallélépipède aura pour volume $18^{ttt}\ 2^{ttpi}\ 11^{ttpo}\ 3^{ttl}$. Mais la hauteur du parallélépipède donné est $2^t\ 3^{pi}\ 4^{po}$. Donc on aura le volume de ce parallélépipède en multipliant $18^{ttt}\ 2^{ttpi}\ 11^{ttpo}\ 3^{ttl}$ par le rapport de $2^t\ 3^{pi}\ 4^{po}$ à la toise (**480**).

		4^{tt}	5^{tpi}	7^{tpo}	
		3^t	4^{pi}	6^{po} :	1^t
Produit par $3^t : 1^t$	3^t. . . . 3 fois $4^{tt}\ 5^{tpi}\ 7^{tpo}$. .	14^{tt}	4^{tpi}	9^{tpo}	
» par $4^{pi} : 1^t$	2^{pi} ou $\frac{1}{3}^t$. $\frac{1}{3}$ du même	1	3	10	4^{tl}
	$2^{\prime}$. . . . $\frac{1}{3}$ du même	1	3	10	4
» par $6^{po} : 1^t$	6^{po} ou $\frac{1}{2}^{pi}$ $\frac{1}{4}$ du produit précédent		2	5	7
		18	**2**	**11**	**3**
		18^{ttt}	2^{ttpi}	11^{ttpo}	3^{ttl}
		2^t	3^{pi}	4^{po} :	1^t
Prod^t par $2^t : 1^t$	2^t . . . 2 fois $18^{ttt}\ 2^{ttpi}\ 11^{ttpo}\ 3^{ttl}$	36^{ttt}	5^{ttpi}	10^{ttpo}	6^{ttl}
» $3^{pi} : 1^t$	3^{pi} ou $\frac{1}{2}^t$. $\frac{1}{2}$ du même	9	1	5	7 6^{ttpt}
» $4^{po} : 1^t$	4^{po} ou $\frac{1}{3}^{pi}$ $\frac{1}{9}$ du produit précédent	1	0	1	11 6
		47	**1**	**6**	**1**

Le volume du parallélépipède est $\mathbf{47}^{ttt}\ \mathbf{1}^{ttpi}\ \mathbf{6}^{ttpo}\ \mathbf{1}^{ttl}$, ou, en observant que la toise-toise-pied vaut $6 \times 6 \times 1$ ou 36 pieds cubes, que la toise-toise-pouce vaut $6 \times 6 \times \frac{1}{12}$ ou 3 pieds cubes, et que la toise-toise-ligne vaut $72 \times 72 \times \frac{1}{12}$ ou 432 pouces cubes, $\mathbf{47}^{t^3}\ \mathbf{54}^{pi^3}\ \mathbf{432}^{po^3}$.

CHAPITRE IX

DU MEILLEUR SYSTÈME DE NUMÉRATION ET DE POIDS ET MESURES

485. On peut se proposer de rechercher quel est le meilleur système de numération et de poids et mesures.

Observons d'abord que la base du système de numération ne doit être ni trop petite ni trop grande ; car, avec une base trop petite, il faudrait trop

de chiffres pour représenter des nombres même peu élevés, et, avec une base trop grande, il faudrait des tables d'addition et de multiplication trop étendues. Il importe aussi, soit au point de vue purement arithmétique, soit au point de vue de l'établissement d'un système de poids et mesures qui soit en harmonie avec le système de numération, que la base et ses puissances soient d'un fractionnement ou d'une divisibilité facile.

On voit que les seuls nombres qui remplissent ces conditions sont 8, 10, 12, et, parmi ceux-ci, **8** semble le meilleur, pour les raisons suivantes :

1° Dans la base 8, le nombre des chiffres nécessaires pour écrire les nombres ne serait guère plus considérable que dans les bases 10 ou 12. En effet, on peut, dans la base 8, écrire, avec le même nombre de chiffres que dans la base 10, ou seulement avec un chiffre de plus, tous les nombres jusqu'à 77777777777_8 ou 8589934591_{10}. De même, on peut écrire, avec le même nombre de chiffres que dans la base 12, ou seulement avec un chiffre de plus, tous les nombres jusqu'à 7777777_8 ou 2097151_{10} ou 851767_{12}, et, avec un ou deux chiffres de plus, tous les nombres jusqu'à 7777777777777_8 ou 549755813887_{10} ou $8a668139767_{12}$.

2° Dans la base 8, les opérations sont notablement plus simples et partant plus sûres que dans les bases 10 ou 12. En effet, le système octaval, comparé au système décimal, réduit les tables d'addition et de multiplication de plus de $\frac{4}{10}$, tandis que le système duodécimal les augmente de plus de moitié.

3° Les puissances successives de 8 offrent, *proportionnellement à leur valeur*, plus de diviseurs que les mêmes puissances de 10 ou de 12. Car les puissances 8^n, 10^n, 12^n ont, respectivement, $3n + 1$, $n^2 + 2n + 1$, $2n^2 + 3n + 1$ diviseurs. Or, comme on le vérifie aisément, on a

$$3n + 1 : n^2 + 2n + 1 > 8^n : 10^n, \quad 3n + 1 : 2n^2 + 3n + 1 > 8^n : 12^n.$$

Et ces inégalités subsistent encore si l'on omet le diviseur 1, qui n'est d'aucun emploi.

4° La multiplication ou la division la plus simple et la plus réduite de toutes, *celle dont le résultat s'éloigne le moins de l'objet à multiplier ou à diviser*, est la multiplication ou la division par 2. Or, dans le système octaval, la multiplication et la division par 2 sont extrêmement simples. En

effet, la multiplication binaire successive de l'unité donne la série de nombres

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048,...

lesquels, dans le système octaval, s'écrivent simplement :

1, 2, 4, 10, 20, 40, 100, 200, 400, 1000, 2000, 4000,...

c'est-à-dire chacun avec un seul des chiffres significatifs 1, 2, 4; et la division binaire engendre la série de fractions

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \frac{1}{512}, \ldots$$

ou

$$\cdot 5,\ \cdot 25,\ \cdot 125,\ \cdot 0625,\ \cdot 03125,\ \cdot 015625,\ \cdot 0078125,\ \cdot 00390625,\ \cdot 001953125, \ldots$$

lesquelles, dans le système octaval, s'écrivent simplement :

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{100}, \frac{1}{200}, \frac{1}{400}, \frac{1}{1000}, \ldots$$

ou

$$\cdot 4,\ \cdot 2,\ \cdot 1,\ \cdot 04,\ \cdot 02,\ \cdot 01,\ \cdot 004,\ \cdot 002,\ \cdot 001, \ldots$$

c'est-à-dire chacune avec un seul des chiffres significatifs 1, 2, 4.

5° La division binaire étant, comme il vient d'être dit, la plus simple et la plus réduite de toutes, il s'ensuit que la base 8 est la plus convenable pour la formation d'un système régulier et uniforme de poids et mesures. Le système décimal n'admet pas de série régulière, non plus que le système duodécimal; car, dans le système décimal, on passe de l'unité à la moitié, de la moitié au cinquième, du cinquième au dixième; et, dans le système duodécimal, on passe de l'unité à la moitié, de la moitié au tiers, du tiers au quart, du quart au sixième, du sixième au douzième. Tous ces fractionnements offrent des disparités choquantes, et sont loin de présenter à l'esprit la clarté, la commodité et la perfection de la série binaire pure, dégagée de toute autre espèce de fractionnement.

6° La division ternaire n'est pas naturelle, parce qu'elle est matériellement difficile. Aussi, si l'on emploie quelquefois le tiers, c'est plutôt pour lui appliquer la division binaire, en le partageant en sixièmes et en

douzièmes, et non en neuvièmes et en vingt-septièmes. La division binaire, au contraire, est si véritablement instinctive que, dans le langage usuel, on ne nomme guère d'autres fractions que les demis, les quarts et les demi-quarts, et que, pour exprimer une quantité égale à un tiers, ou qui en approche, on préfère dire *un bon quart*.

7° Si l'on jette un coup d'œil sur les systèmes de poids et mesures anciens et modernes, autres que le système métrique, on reconnaît aisément que, malgré l'existence de la numération décimale, les différents peuples ont le plus généralement employé les multiples et les sous-multiples binaires, souvent même sans mélange d'aucune autre sorte de division. Bien plus, dans le système métrique, créé non par la nature mais par l'art et imposé non par l'usage mais par la loi, les mesures décimales ont leur double et leur moitié. A la Bourse, même dans les pays à monnaies décimales, les transactions sur un grand nombre de fonds s'opèrent par $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, et, pareillement, le prix du change varie suivant l'échelle 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ pour cent. Les taux usuels d'intérêt et d'escompte varient aussi de quart en quart de franc. La série de nos monnaies d'argent, par manque de logique décimale, comprenait autrefois la pièce de $2\frac{1}{2}$ francs, moitié de celle de cinq francs, et la pièce d'un quart de franc; la série des monnaies d'or comprenait la pièce de 40 francs. Tant il est naturel de revenir au fractionnement ou à la progression binaire en ce qui concerne les poids et mesures.

8° Enfin, n'omettons pas d'observer que l'on pourrait également *compter sur ses doigts* dans la numération octavale. On pourrait, en effet, faire servir de compteurs les deux pouces, que la nature, d'ailleurs, a formés à part, et les huit autres doigts fonctionneraient comme signes des huit premiers nombres.

Il semble résulter, des considérations qui précèdent, que le système octaval serait le meilleur système de numération et de poids et mesures (*).

(*) Lire, sur cette question, l'intéressant ouvrage de M. Colenne, *Le système octaval, ou la numération et les poids et mesures réformés*, Paris 1845.

LIVRE HUITIÈME

DE LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES

—

CHAPITRE I

DE LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES EN GÉNÉRAL

486. « Parmi les diverses questions auxquelles peuvent donner lieu les transactions sociales les plus fréquentes, il n'en est aucune, dit Lacroix, dont on ne puisse découvrir la solution par des raisonnements fort simples, dès qu'on entend bien la signification des termes techniques dans lesquels l'énoncé est exprimé. En faisant d'une manière convenable le développement des conditions explicites et implicites de cet énoncé, on parvient à déterminer laquelle des quatre opérations fondamentales, ou de leurs combinaisons, il faut faire sur les nombres donnés pour parvenir aux nombres inconnus. L'habitude de ce genre de recherches constitue le vrai savoir en Arithmétique, dispense la mémoire de s'embarrasser de cette foule de règles dont sont remplis les traités ordinaires de cette science, et présente des ressources pour les cas imprévus, dans lesquels échoue le calculateur qui ne sait que des formules d'opérations. »

487. Lorsqu'un problème est *simple,* c'est-à-dire peut être résolu par une seule opération, il n'y a, en général, aucune difficulté de reconnaître si cette opération est une addition ou une soustraction; mais on peut quelquefois hésiter sur l'emploi de la multiplication et de la division.

Pour lever le doute, on s'aidera des deux remarques suivantes :

1° Lorsqu'on compare deux grandeurs qui dépendent l'une de l'autre, on doit considérer avec soin, si, l'une de ces grandeurs devenant un certain nombre de fois *plus grande* ou *plus petite,* l'autre devient aussi ce nombre de fois *plus grande* ou *plus petite,* ou si, au contraire, elle devient ce nombre de fois *plus petite* ou *plus grande;*

2° Lorsque, parmi les nombres donnés, il y a des fractions ou des nombres fractionnaires, on fera, sur ces fractions ou ces nombres fractionnaires, les mêmes raisonnements et les mêmes opérations que *s'il s'agissait de nombres entiers.*

488. Problème 1. *Le mètre d'une certaine qualité de drap coûte 10 francs 50 centimes. Combien paiera-t-on : 1° pour 6 mètres; 2° pour $\frac{4}{7}$ de mètre; 3° pour 4 mètres 5 décimètres?*

Si, pour un mètre de drap, on paie 10·50f, pour 6 mètres on paiera 6 fois 10·50f, ou (**230**) 10·50f × 6 = **63f**.

De même, si, pour un mètre, on paie 10·50f, pour $\frac{4}{7}$ de mètre on paiera les $\frac{4}{7}$ de 10·50f, ou (**231**) 10·50f × $\frac{4}{7}$ = **6f**.

Enfin, si, pour un mètre, on paie 10·50f, pour 4·5 mètres on paiera 4 fois 10·50f, plus les $\frac{5}{10}$ de 10·50f, ou (**233**) 10·50f × 4·5 = **47·25f**.

On voit que, dans tous les cas, *on multiplie le prix du mètre par le nombre de mètres,* que ce nombre soit entier ou fractionnaire ou une fraction.

489. Problème 2. *On a payé 54 francs 60 centimes pour 6 mètres 24 centimètres de drap. Quel est le prix du mètre?*

Si le prix du mètre était connu, en le multipliant par 6·24, on aurait pour produit 54·60f (**488**) : donc (**241**) le prix du mètre est égal au quotient de 54·60f par 6·24, ou à **8·75f**.

On peut dire encore (**487**,2°) :

Si pour 6·24m on paie 54·60f, pour un mètre on paiera 6·24 fois moins, ou 54·60f : 6·24 = **8·75f**.

490. Problème 3. *Le mètre de drap d'une certaine qualité coûte 7 francs 50 centimes. Combien de mètres recevra-t-on pour 48 francs?*

Le prix total 48f est le produit de 7·50f par le nombre de mètres demandé (**488**) : donc (**241**) ce nombre de mètres est égal au quotient de 48 par 7·50, ou à **6·4m**.

On peut dire encore (**487**,2°) :

Si le mètre de drap coûte 7·50f, on recevra, pour 48f, autant de mètres que 7·50f sont contenus de fois dans 48f, ou 48 : 7·50 = **6·4m**.

491. Lorsqu'un problème est *composé,* c'est-à-dire ne peut être résolu qu'au moyen de plusieurs opérations, on le décompose en une suite de problèmes simples, dont le dernier a pour inconnue celle du problème proposé.

Il n'existe pas de règle générale pour opérer la décomposition des problèmes. Mais il est utile, ainsi que nous allons le faire dans les chapitres suivants, d'exposer certaines méthodes de solution applicables à un nombre plus ou moins étendu de questions, et de parcourir les principales applications que l'on peut faire de l'Arithmétique à la vie usuelle.

CHAPITRE II

DE LA RÈGLE DE TROIS

492. On dit que deux grandeurs sont *directement proportionnelles,* ou, simplement, qu'elles sont *proportionnelles,* ou qu'elles *varient dans le même rapport,* lorsque, l'une devenant un certain nombre de fois *plus grande* ou *plus petite*, l'autre devient aussi ce même nombre de fois *plus grande* ou *plus petite*. Si, par exemple, un certain nombre de mètres d'étoffe coûte une certaine somme, un nombre de mètres 2, 3, 4... fois *plus grand* coûte une somme 2, 3, 4... fois *plus grande :* donc le nombre de mètres et le prix de ces mètres sont deux grandeurs directement proportionnelles.

Lorsque deux grandeurs sont directement proportionnelles, le rapport de deux valeurs quelconques de l'une est égal au rapport des deux valeurs correspondantes de l'autre.

493. On dit que deux grandeurs sont *inversement* ou *réciproquement proportionnelles,* ou qu'elles *varient dans un rapport inverse,* lorsque, l'une devenant un certain nombre de fois *plus grande* ou *plus petite,* l'autre devient ce même nombre de fois *plus petite* ou *plus grande.* Si, par exemple, pour faire un ouvrage, un certain nombre d'ouvriers ont employé un certain nombre de jours, un nombre d'ouvriers 2, 3, 4... fois *plus grand* emploieront, pour faire le même ouvrage, un nombre de jours 2, 3, 4... fois *plus petit :* donc le nombre d'ouvriers et le nombre de jours sont deux grandeurs inversement proportionnelles.

Lorsque deux grandeurs sont inversement proportionnelles, le rapport de deux valeurs quelconques de l'une est l'inverse du rapport des deux valeurs correspondantes de l'autre.

494. On nomme *règle de trois* une règle par laquelle, connaissant les valeurs simultanées de plusieurs grandeurs, directement ou inversement proportionnelles à l'une d'entre elles, on obtient la valeur que prend celle-ci quand on donne de nouvelles valeurs à toutes les autres.

Ce nom de *règle de trois* vient de ce que les questions relatives aux grandeurs directement ou inversement proportionnelles peuvent se résoudre au moyen d'une ou de plusieurs *proportions*, dans chacune desquelles on connaît *trois* termes (**383**).

Il est toutefois préférable, ainsi que nous le ferons dans le chapitre suivant, de résoudre ces questions par la *méthode analytique*, ou de *réduction à l'unité*.

La règle de trois est dite *simple* ou *composée*, suivant que le problème est résoluble par une seule ou par plusieurs proportions.

495. Problème **4**. *Si* 8^m *de drap coûtent* 50^f, *combien paiera-t-on pour* 20^m *du même drap?*

Le nombre de mètres et le prix de ces mètres sont deux grandeurs *directement* proportionnelles. On a donc, en désignant par x le prix cherché, la proportion

$$\frac{8}{20} = \frac{50}{x}, \quad \text{d'où } (\mathbf{383}) \quad x = \frac{50 \times 20}{8} = \mathbf{125^f}.$$

496. Problème **5**. 8 *ouvriers ont fait un certain ouvrage en* 50 *jours. Combien de jours* 20 *ouvriers auraient-ils mis à faire le même ouvrage?*

Le nombre d'ouvriers et le nombre de jours de travail sont deux grandeurs *inversement* proportionnelles. On a donc, en désignant par x le nombre de jours cherché, la proportion

$$\frac{8}{20} = \frac{x}{50}, \quad \text{d'où } (\mathbf{383}) \quad x = \frac{50 \times 8}{20} = \mathbf{20^j}.$$

497. Problème **6**. *Il a fallu* 10 *rouleaux de papier ayant* 24^m *de long et* $1^{\cdot}50^m$ *de large pour tapisser un appartement. Combien faudrait-il de rouleaux de* 30^m *de long sur* $0^{\cdot}80^m$ *de large?*

On dispose les données et les inconnues comme il suit :

Il faut 10 rouleaux de papier ayant 24^m de long et $1^{\cdot}50^m$ de large.

x	30	1·50
y	30	0·80

Cela étant fait, on observe que le nombre de rouleaux est *inversement* proportionnel à la longueur et à la largeur du papier. On a donc les proportions

$$\frac{10}{x} = \frac{30}{24}, \quad \frac{x}{y} = \frac{0^{\cdot}80}{1^{\cdot}50}.$$

Multipliant ces proportions membre à membre, on a

$$\frac{10}{x} \times \frac{x}{y} = \frac{30}{24} \times \frac{0^{\cdot}80}{1^{\cdot}50}, \quad \text{ou} \quad \frac{10}{y} = \frac{30 \times 0^{\cdot}80}{24 \times 1^{\cdot}50},$$

d'où (**383**) $$y = \frac{10 \times 24 \times 1^{\cdot}50}{30 \times 0^{\cdot}80} = \mathbf{15} \text{ rouleaux.}$$

498. Problème **7**. *Il a fallu* 16 *jours à* 15 *ouvriers, travaillant* 9 *heures par jour, pour creuser un fossé ayant* 36^m *de longueur. Combien faudra-t-il de jours à* 18 *ouvriers, travaillant* 10 *heures par jour, pour creuser un fossé ayant* 60^m *de longueur?*

On dispose les données et les inconnues comme il suit :

Il faut 16^j à 15 ouvriers trav^t 9^h par jour pour faire 36^m de fossé.

x	18	9	36
y	18	10	36
z	18	10	60

Cela étant fait, on observe que le nombre de jours est *inversement* proportionnel au nombre d'ouvriers et au nombre d'heures de travail, mais qu'il est *directement* proportionnel à la longueur du fossé. On a donc les proportions

$$\frac{16}{x} = \frac{18}{15}, \quad \frac{x}{y} = \frac{10}{9}, \quad \frac{y}{z} = \frac{36}{60}.$$

Multipliant ces proportions membre à membre, on a

$$\frac{16}{x} \times \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} = \frac{18}{15} \times \frac{10}{9} \times \frac{36}{60}, \quad \text{ou} \quad \frac{16}{z} = \frac{18 \times 10 \times 36}{15 \times 9 \times 60},$$

d'où (**383**) $$z = \frac{16 \times 15 \times 9 \times 60}{18 \times 10 \times 36} = \mathbf{20}^j.$$

499. Les valeurs des inconnues, dans les quatre problèmes qui précèdent, peuvent s'écrire :

$$50^f \times \frac{20}{8}, \quad 50^j \times \frac{8}{20}, \quad 10 \times \frac{24}{30} \times \frac{1^{\cdot}50}{0^{\cdot}80}, \quad 16^j \times \frac{15}{18} \times \frac{9}{10} \times \frac{60}{36}.$$

Ainsi, *pour obtenir le nombre inconnu, on multiplie le nombre connu de même espèce par les rapports des nouvelles données aux premières, ou par les rapports inverses, suivant qu'il s'agit de grandeurs directement ou inversement proportionnelles à la grandeur qui est de même espèce que l'inconnue.*

***500**. Problème **8**. *La valeur d'un diamant, brut ou taillé, est proportionnelle au carré de son poids. Si un diamant taillé du poids d'un carat, ou de 206 milligrammes, vaut 192f, quelle sera la valeur d'un diamant taillé du poids d'un gramme?*

On dit qu'*une grandeur est proportionnelle au carré d'une autre grandeur*, lorsque, celle-ci devenant 2, 3, 4, 5... fois plus grande, la première devient 4, 9, 16, 25... fois plus grande. On a donc, en désignant par x la valeur d'un diamant taillé du poids d'un gramme, la proportion

$$\frac{x}{192} = \frac{1000^2}{206^2}, \quad \text{d'où (383)} \quad x = \frac{192 \times 1000^2}{206^2} = \mathbf{4524^f} \text{ (*)}.$$

CHAPITRE III

MÉTHODE DE RÉDUCTION A L'UNITÉ (**)

501. La *méthode analytique*, ou *méthode de réduction à l'unité*, consiste, connaissant la valeur d'une certaine grandeur, correspondant à certaines valeurs d'autres grandeurs, à chercher la valeur de la première,

(*) A la *règle de trois* se rattachent les problèmes sur la règle conjointe, les partages proportionnels, l'intérêt, l'escompte, les rentes sur l'État, les poids spécifiques, les titres des matières d'or et d'argent, les changes et les arbitrages.

(**) Cette méthode est due au baron Reynaud, qui l'a indiquée dans son *Introduction à l'Algèbre*, Paris 1800.

quand on donne la valeur 1 *à toutes les autres,* pour ensuite en déduire la valeur de la première, quand on donne une nouvelle série de valeurs à toutes les autres.

Cette méthode est principalement employée lorsqu'il s'agit de grandeurs directement ou inversement proportionnelles (**494**).

502. Problème **9**. *Si* 8^m *de drap coûtent* 50^f, *combien paiera-t-on pour* 20^m *du même drap?*

Le nombre de mètres et le prix de ces mètres sont deux grandeurs *directement* proportionnelles (**492**). On dira donc :

Puisque 8^m coûtent 50^f, 1^m coûtera 8 fois *moins,* ou $\frac{50^f}{8}$; et 20^m coûteront 20 fois *plus,* ou $\frac{50^f \times 20}{8} = \mathbf{125^f}$.

503. Problème **10**. 8 *ouvriers ont fait un certain ouvrage en* 50 *jours. Combien de jours* 20 *ouvriers auraient-ils mis à faire le même ouvrage?*

Le nombre d'ouvriers et le nombre de jours de travail sont deux grandeurs *inversement* proportionnelles (**493**). On dira donc :

Si 8 ouvriers ont mis 50 jours à faire un certain ouvrage, un seul ouvrier en aurait mis 8 fois *plus,* ou $50^j \times 8$, et 20 ouvriers en auraient mis 20 fois *moins,* ou $\frac{50^j \times 8}{20} = \mathbf{20}$ jours.

504. Problème **11**. *Il a fallu* 10 *rouleaux de papier ayant* 24^m *de long et* $1^{\cdot}50^m$ *de large pour tapisser un appartement. Combien faudrait-il de rouleaux de* 30^m *de long sur* $0^{\cdot}80^m$ *de large?*

Le nombre de rouleaux est *inversement* proportionnel à la longueur et à la largeur du papier. On dira donc :

Quand le rouleau a 24^m de long et $1^{\cdot}50^m$ de large, il en faut 10.

1	»	$10 \times 24.$
30	»	$\frac{10 \times 24}{30}.$
»	1	$\frac{10 \times 24 \times 1^{\cdot}50}{30}.$
»	$0^{\cdot}80$	$\frac{10 \times 24 \times 1^{\cdot}50}{30 \times 0^{\cdot}80} = \mathbf{15.}$

On peut encore résoudre le même problème de la manière suivante :

La surface d'un rouleau de 24^m de long sur $1^{\cdot}50^m$ de large est égale à $24 \times 1^{\cdot}50 = 36^{m2}$; et, puisqu'il en a fallu 10 pour tapisser l'appartement, la surface tapissée est égale à $36^{m2} \times 10 = 360^{m2}$.

Le nouveau rouleau a 30^m de long sur $0^{\cdot}80^m$ de large : sa surface est donc égale à $30 \times 0^{\cdot}80 = 24^{m2}$, et, par suite, il en faudra autant que 24^{m2} sont contenus de fois dans 360^{m2}, ou $360 : 24 = \mathbf{15}$ rouleaux.

505. Problème **12.** *Il a fallu* 16 *jours à* 15 *ouvriers, travaillant* 9 *heures par jour, pour creuser un fossé ayant* 36^m *de longueur. Combien faudra-t-il de jours à* 18 *ouvriers, travaillant* 10 *heures par jour, pour creuser un fossé ayant* 60^m *de longueur?*

Le nombre de jours est *inversement* proportionnel au nombre d'ouvriers et au nombre d'heures de travail, mais il est *directement* proportionnel à la longueur du fossé. On dira donc :

15 ouvriers trav^t 9^h par jour font 36^m de fossé en 16^j.

1	»	»	$16^j \times 15.$
18	»	»	$\frac{16^j \times 15}{18}.$
»	1	»	$\frac{16^j \times 15 \times 9}{18}.$
»	10	»	$\frac{16^j \times 15 \times 9}{18 \times 10}.$
»	»	1	$\frac{16^j \times 15 \times 9}{18 \times 10 \times 36}.$
»	»	60	$\frac{16^j \times 15 \times 9 \times 60}{18 \times 10 \times 36} = 20^j$

***506.** Problème **13.** *La valeur d'un diamant, brut ou taillé, est proportionnelle au carré de son poids. Si un diamant brut du poids d'un carat, ou de* 206 *milligrammes, vaut* 48^f, *quelle sera la valeur d'un diamant brut du poids d'un gramme?*

On dit qu'*une grandeur est proportionnelle au carré d'une autre grandeur* lorsque, celle-ci devenant 2, 3, 4, 5... fois plus grande, la première devient 4, 9, 16, 25... fois plus grande (**500**). Cela étant, on dira :

Un diamant brut, du poids de 206^{mg}, vaut 48^f.

Un diamant brut, du poids de 1^{mg}, vaut 206^2 ou 42436 fois *moins*, ou $\frac{48^f}{42436}$.

Et un diamant brut, du poids de 1000^{mg} ou 1^g, vaut 1000^2 ou 1000000 de fois *plus*, ou $\frac{48^f \times 1000000}{42436} = \mathbf{1131^f}$.

CHAPITRE IV

MÉTHODE DE RÉDUCTION AU MÊME COEFFICIENT

507. Certains problèmes se résolvent en ramenant à un *nombre unique*, à l'aide de multiplicateurs ou de diviseurs convenablement choisis, des nombres différents se rapportant à une même espèce de grandeur.

Cette méthode est appelée *méthode de réduction au même coefficient* ou *à un même terme de comparaison*.

508. Problème **14**. *Pour 8^k de sucre et 15^k de café, on paie 53^f; pour 7^k de sucre et 12^k de café, on paie 43^f. Quel est le prix du kilogramme de sucre et du kilogramme de café?*

Dans ce problème, la quantité de sucre est, la première fois, de 8^k, et, la seconde fois, de 7^k. Pour que la quantité de sucre fût la même les deux fois, il suffirait que les quantités de sucre et de café fussent, la première fois, 7 fois plus grandes, et, la seconde fois, 8 fois plus grandes. On dira donc :

SUCRE	CAFÉ	PRIX
8^k	15^k	53^f
7	12	43
56^k	105^k	371^f
56	96	344
	9^k	27^f
	1	$\mathbf{3^f}$
1		$\mathbf{1^f}$

8^k de sucre et 15^k de café coûtent 53^f : donc **7 fois 8^k** ou 56^k de sucre et 7 fois 15^k ou 105^k de café coûtent 7 fois 53^f ou 371^f.

7^k de sucre et 12^k de café coûtent 43^f : donc **8 fois 7^k** ou 56^k de sucre et 8 fois 12^k ou 96^k de café coûtent 8 fois 43^f ou 344^f.

Il résulte de là que 105 — 96 ou 9^k de café coûtent 371 — 344 ou 27^f : donc le kilogramme de café coûte $27^f : 9 = \mathbf{3^f}$.

Pour trouver le prix du kilogramme de sucre, on observe que 15^k de café coûtent 45^f. Par suite, 8^k de sucre coûtent $53 - 45 = 8^f$, et un kilogramme de sucre coûte $8^f : 8 = 1^f$.

509. Problème **15**. *Partager le nombre* 100 *en deux parties telles que, si l'on divise la première par* 7 *et la seconde par* 11, *la somme des quotients soit égale à* 12.

La première partie plus la seconde égalent 100.

Le $\frac{1}{7}$ de la première partie plus le $\frac{1}{11}$ de la seconde égalent 12; ou, *en multipliant par* 7, la première partie plus les $\frac{7}{11}$ de la seconde égalent 84.

Il résulte de là que les $\frac{4}{11}$ de la seconde partie égalent 100 — 84 ou 16. Le $\frac{1}{11}$ de la seconde partie égale donc 16 : 4 ou 4, et la seconde partie égale 4 × 11 ou **44**.

La première partie égale 100 — 44 ou **56**.

510. Problème **16**. *Un canotier peut parcourir* 42 *mètres par minute en descendant une rivière, et seulement* 24 *mètres par minute en remontant le courant. Jusqu'à quelle distance peut-il descendre pour qu'en partant à* $11^h 15^m$ *du matin il soit de retour au point de départ à* 2^h *de l'après-midi?*

Remarquons d'abord que de $11^h 15^m$ du matin à 2^h de l'après-midi il y a $2^h 45^m$ ou 165 minutes. Puis ramenons les deux nombres 42 et 24 à leur plus petit commun multiple 168 au moyen des multiplicateurs 168 : 42 ou 4 et 168 : 24 ou 7.

Pour descendre 42 mètres il faut 1 minute, et, pour en descendre **42** × **4** ou 168, il faut 4 minutes.

Pour remonter 24 mètres il faut une minute, et, pour en remonter **24** × **7** ou 168, il faut 7 minutes.

Donc, pour descendre et remonter 168 mètres, il faut 4 + 7 = 11 minutes.

Cela étant, on dira :

En 11 minutes, on peut descendre et remonter 168^m.

En 1 minute, on peut descendre et remonter $\frac{168^m}{11}$.

Et en 165 minutes, on peut descendre et remonter $\frac{168^m \times 165}{11} = \mathbf{2520^m}$

511. Problème **17**. *Un lévrier poursuit un lièvre qui a 40 sauts l'avance; le lévrier fait 7 sauts pendant que le lièvre en fait 9; mais 3 sauts du lévrier valent autant que 5 sauts du lièvre. On demande après combien de sauts le lévrier aura atteint le lièvre.*

Ici, les sauts du lévrier sont 7 dans une première donnée, et 3 dans une autre donnée. On dira donc, en ramenant ces deux nombres à leur commun multiple 21 :

Le lévrier fait 7 sauts pendant que le lièvre en fait 9, et il en fait **7** × **3** ou 21 pendant que le lièvre en fait 9 × 3 ou 27.

Mais 3 sauts du lévrier en valent 5 du lièvre, et **3** × **7** ou 21 sauts du lévrier en valent 5 × 7 ou 35 du lièvre.

Par conséquent, lorsque le lévrier fait 21 sauts, il gagne, sur le lièvre, 35 — 27 = 8 sauts du lièvre.

Le lièvre ayant 40 sauts d'avance, le lévrier devra faire, pour l'atteindre, 40 : 8 ou 5 fois 21 sauts ou **105** sauts.

512. Problème **18**. *Trouver deux nombres tels que le quadruple du premier surpasse de 3 le quart du second, et que le sextuple du premier surpasse de 5 le sixième du second.*

Ici, le premier nombre est considéré d'abord comme multiplié par 4, puis comme multiplié par 6. Ramenant ces deux nombres 4 et 6 à leur plus petit commun multiple 12, au moyen des multiplicateurs 12 : 4 ou 3 et 12 : 6 ou 2, on dira :

4 fois le premier nombre égalent le $\frac{1}{4}$ du second, plus 3.
6 fois le premier nombre égalent le $\frac{1}{6}$ du second, plus 5.

3 fois 4 ou 12 fois le premier nombre égalent les $\frac{3}{4}$ du second, plus 9.
2 fois 6 ou 12 fois le premier nombre égalent les $\frac{2}{6}$ du second, plus 10.

Donc les $\frac{3}{4}$ moins les $\frac{2}{6}$ ou les $\frac{5}{12}$ du second nombre égalent 10 moins 9 ou 1; donc le second nombre égale $\frac{12}{5}$ ou **2·4**.

On trouve ensuite que le premier nombre égale **0·9**.

On peut aussi ramener les deux nombres 4 et 6 à leur plus grand commun diviseur 2, au moyen des diviseurs 2 et 3, ou à l'unite, au moyen des diviseurs 4 et 6.

*513. Problème 19. *Deux villes distantes de 42 kilomètres sont reliées par un chemin de fer. Dans un premier train, il y a eu 84 voyageurs de première classe, 210 de deuxième classe et 605 de troisième classe, et la recette a été de 2176f. Dans un deuxième train, il y a eu 90 voyageurs de première classe, 120 de deuxième classe et 343 de troisième classe, et la recette a été de 1406f. Enfin, dans un troisième train, il y a eu 100 voyageurs de première classe, 180 de deuxième classe et 833 de troisième classe, et la recette a été de 2606f. On demande le prix du billet de chaque classe.*

Disposant des données et la solution du problème comme on le voit dans le tableau ci-joint, on observe que le plus petit commun multiple des nombres 84, 90, 100 est **6300** : on multiplie donc les nombres de la première ligne par 6300 : 84 ou par 75, ceux de la deuxième ligne par 6300 : 90 ou par 70, et ceux de la troisième ligne par 6300 : 100 ou par 63.

BILLETS DE PREMIÈRE CLASSE	BILLETS DE DEUXIÈME CLASSE	BILLETS DE TROISIÈME CLASSE	RECETTE	*MULTIPLICATEURS*
84	210	605	2 176f	75
90	120	343	1 406	*70*
100	180	833	2 606	*63*
6300	15 750	45 375	163 200f	
6300	8 400	24 010	98 420	
6300	11 340	52 479	164 178	
	7 350	21 365	64 780f	*3*
	— 4 410	7 104	978	*5*
	22 050	64 095	194 340f	
	— 22 050	35 520	4 890	
		99 615	199 230f	
		1	2f	
	1		3f	
1			4f	

Cela étant fait, on voit, en comparant la première ligne avec la deuxième, que 15750 — 8400 = 7350 voyageurs de plus en deuxième classe et 45375 — 24010 = 21365 voyageurs de plus en troisième classe donnent une augmentation de recette de 163200 — 98420 = 64780f.

On voit, de même, en comparant la troisième ligne avec la première, que 15750 — 11340 = 4410 voyageurs de moins en deuxième classe et 52479 — 45375 = 7104 voyageurs de plus en troisième classe donnent une augmentation de recette de 164178 — 163200 = 978f.

Le plus petit commun multiple des nombres 7350 et 4410 est **22050** : on multiplie donc la nouvelle première ligne par 22050 : 7350 ou par 3, et la nouvelle deuxième ligne par 22050 : 4410 ou par 5.

Cela étant fait, on voit que 64095 + 35520 = 99615 billets de troisième classe donnent une recette de 194340 + 4890 = 199230f : donc un billet de troisième classe coûte

199230f : 99615 = **2f**.

Pour avoir le prix du billet de deuxième classe, on observe que 21365 billets de troisième classe coûtent 42730f; par suite, 7350 billets de deuxième classe coûtent 64780 — 42730 = 22050f, et un billet de deuxième classe coûte

22050f : 7350 = **3f**.

Enfin, pour avoir le prix du billet de première classe, on observe que 210 billets de deuxième classe coûtent 630f et que 605 billets de troisième classe coûtent 1210f; par suite, 84 billets de première classe coûtent 2176 — 630 — 1210 = 336f, et un billet de première classe coûte

336f : 84 = **4f**.

CHAPITRE V

DE LA RÈGLE CONJOINTE

514. On appelle *règle de chaîne* ou *règle conjointe* une *règle par laquelle, étant données autant de grandeurs qu'on voudra, dont on connaît le rapport de chacune à la suivante, on détermine le rapport de la première à la dernière.*

Cette règle sert surtout à déterminer les rapports des monnaies ou mesures de deux pays, quand on connaît les rapports de ces monnaies ou mesures avec celles d'autres pays.

Ainsi que nous allons le voir, elle n'est qu'une application de la *méthode de réduction au même coefficient* (**507**).

515. Problème **20**. 61 *archines de Turquie valent* 65 *archines de Russie*; 9 *archines de Russie valent* 7 *yards anglais*; 35 *yards anglais valent* 32^{m}. *Combien* 100 *archines de Turquie valent-elles de mètres?*

Appelons x le nombre de mètres demandé. On a les égalités suivantes :

x mètres . . . . . = 100 archines de Turquie ;
61 archines de Turquie. = 65 archines de Russie ;
9 archines de Russie . = 7 yards anglais ;
35 yards anglais. . . = 32 mètres.

Multiplions les deux membres de chaque égalité *par les nombres qui figurent aux premiers membres des égalités qui suivent, et par les nombres qui figurent aux seconds membres des égalités qui précèdent*. Nous aurons :

$x \times 61 \times 9 \times 35$ mètres . . . . . = $61 \times 9 \times 35 \times 100$ archines de Turquie;
$61 \times 9 \times 35 \times 100$ archines de Turquie = $9 \times 35 \times 100 \times 65$ archines de Russie;
$9 \times 35 \times 100 \times 65$ archines de Russie = $35 \times 100 \times 65 \times 7$ yards anglais;
$35 \times 100 \times 65 \times 7$ yards anglais . . = $100 \times 65 \times 7 \times 32$ mètres.

Le second membre de chaque égalité est maintenant égal au premier membre de la suivante : donc le premier membre de la première égalité est égal au second membre de la dernière, et on a

$$x \times 61 \times 9 \times 35 = 100 \times 65 \times 7 \times 32,$$

égalité à laquelle on serait arrivé immédiatement *en multipliant entre eux les nombres qui figurent aux premiers membres et entre eux les nombres qui figurent aux seconds membres de toutes les égalités*. On tire, de là,

$$x = \frac{100 \times 65 \times 7 \times 32}{61 \times 9 \times 35} = \mathbf{75^{m}774}.$$

*On peut encore résoudre le même problème de la manière suivante :
Soit x le nombre de mètres demandé.

On a, comme précédemment, les égalités suivantes :

$$x \text{ mètres} = 100 \text{ archines de Turquie};$$
$$61 \text{ archines de Turquie} = 65 \text{ archines de Russie};$$
$$9 \text{ archines de Russie} = 7 \text{ yards anglais};$$
$$35 \text{ yards anglais} = 32 \text{ mètres}.$$

Désignons par a, b, c, d les longueurs respectives du mètre, de l'archine de Turquie, de l'archine de Russie et du yard anglais, *rapportés à une même unité de longueur*; les égalités précédentes pourront s'écrire :

$$a \times x = b \times 100;$$
$$b \times 61 = c \times 65;$$
$$c \times 9 = d \times 7;$$
$$d \times 35 = a \times 32.$$

Multiplions membre à membre ces quatre égalités : l'égalité résultante aura les facteurs a, b, c, d communs à ses deux membres, et, en supprimant ces facteurs communs, on aura simplement

$$x \times 61 \times 9 \times 35 = 100 \times 65 \times 7 \times 32,$$

d'où

$$x = \frac{100 \times 65 \times 7 \times 32}{61 \times 9 \times 35} = \mathbf{75^{m}774}.$$

516. On déduit de ce qui précède la règle suivante :

Pour résoudre un problème de règle conjointe, on représente par x *le nombre inconnu et on écrit, sous forme d'égalités, les différentes relations exprimées dans le problème, en ayant soin que le premier membre de chaque égalité soit de même espèce que le second membre de l'égalité précédente : le second membre de la dernière égalité sera d'ailleurs de même espèce que le premier membre de la première. On multiplie toutes ces égalités membre à membre, et on obtient une nouvelle égalité qui fait connaître la valeur de l'inconnue.*

517. Problème **21.** 50 *roubles de Russie valent* 81 *florins d'Autriche; le florin d'Autriche vaut* 2 *mark d'Allemagne;* 81 *mark d'Allemagne valent* 100^{f}. *Quelle est la valeur, en francs, du rouble de Russie?*

Appelons x la valeur, en francs, du rouble de Russie, et écrivons cette suite d'égalités :

x francs . . . . . = 1 rouble de Russie;
50 roubles de Russie = 81 florins d'Autriche;
1 florin d'Autriche = 2 mark d'Allemagne;
81 mark d'Allemagne = 100 francs.

En multipliant ces égalités membre à membre, on a

$$x \times 50 \times 1 \times 81 = 1 \times 81 \times 2 \times 100,$$

d'où

$$x = \frac{1 \times 81 \times 2 \times 100}{50 \times 1 \times 81} = 4^{f}.$$

518. Problème **22**. *Le litre d'huile d'olive pesant* 915^{g} *et le kilogramme coûtant* 3^{f}, *quel est le prix du litre?*

Appelons x le prix du litre d'huile d'olive, et disposons vis-à-vis l'une de l'autre les quantités qui s'équivalent :

x francs. . . . . 1 litre d'huile;
1 litre d'huile . . . 0·915 kg. d'huile;
1 kg. d'huile . . . 3 francs.

Égalant les produits de cette double suite de quantités équivalentes, on a

$$x \times 1 \times 1 = 1 \times 0{\cdot}915 \times 3, \qquad \text{ou} \qquad x = \mathbf{2{\cdot}745^{f}}.$$

519. Problème **23**. *Un hectolitre de noix en coques pèse* $67{\cdot}5^{k}$ *en moyenne et donne* 30^{k} *d'amandes épluchées qui rendent les* $\frac{8}{15}$ *de leur poids d'huile. Le litre d'huile de noix pèse* 928^{g}. *Combien faut-il de litres de noix en coques pour fournir un litre d'huile?*

Appelons x le nombre de litres de noix en coques nécessaire pour fournir 1 litre d'huile, et disposons vis-à-vis l'une de l'autre les quantités qui s'équivalent :

x litres de noix en coques. . . 1 litre d'huile;
1 litre d'huile . . . . . 0·928 kg. d'huile;
8 kg. d'huile . . . . . 15 kg. d'amandes épluchées;
30 kg. d'amandes épluchées . . 100 litres de noix en coques.

Égalant les produits de cette double suite de quantités équivalentes, on a

$$x \times 1 \times 8 \times 30 = 1 \times 0{\cdot}928 \times 15 \times 100,$$

d'où

$$x = \frac{0{\cdot}928 \times 15 \times 100}{8 \times 30} = \mathbf{5{\cdot}8}^{l}.$$

520. Problème **24.** *On achète* $5{\cdot}32^{k}$ *de groseilles pour faire des confitures. Ces groseilles fournissent les* $\frac{4}{7}$ *de leur poids de jus, et ce jus est mêlé à un poids égal de sucre à l'état de sirop. Le mélange est ensuite chauffé et clarifié, ce qui lui fait perdre* $\frac{3}{152}$ *de son poids. L'opération terminée, la confiture est mise dans des pots ayant* $0{\cdot}149^{l}$ *de capacité. On demande combien on pourra remplir de ces pots, sachant que le litre de confiture pèse autant que* $1{\cdot}25^{l}$ *d'eau.*

Désignons par x le nombre de pots demandé, et disposons vis-à-vis l'une de l'autre les qualités qui s'équivalent :

x pots.	5·32 kg. de groseilles;
7 kg. de groseilles . .	4 kg. de jus;
1 kg. de jus. . . .	2 kg. de mélange;
152 kg. de mélange . .	149 kg. de confiture;
1·25 kg. de confiture . .	1 litre de confiture;
0·149 litre	1 pot.

Égalant les produits de cette double suite de quantités équivalentes, on a

$$x \times 7 \times 1 \times 152 \times 1{\cdot}25 \times 0{\cdot}149 = 5{\cdot}32 \times 4 \times 2 \times 149 \times 1 \times 1,$$

d'où

$$x = \frac{5{\cdot}32 \times 4 \times 2 \times 149}{7 \times 152 \times 1{\cdot}25 \times 0{\cdot}149} = \mathbf{32} \text{ pots.}$$

CHAPITRE VI

SOLUTIONS RÉTROGRADES

521. On appelle *solutions rétrogrades* celles dans lesquelles on part du résultat final de plusieurs opérations successives pour remonter, de proche en proche, au nombre primitif inconnu.

522. Problème **25**. *Trouver un nombre tel que, si on en retranche* 8, *qu'on multiplie le reste par* 9, *qu'on ajoute* 10 *au produit et qu'on divise la somme par* 11, *le quotient soit* 59.

Avant de diviser par 11, on a $59 \times 11 = 649$; avant d'ajouter 10, $649 - 10 = 639$; avant de multiplier par 9, $639 : 9 = 71$, et avant de retrancher 8, $71 + 8 = 79$.

Le nombre cherché est **79**.

523. Problème **26**. *Une marchande d'œufs vend la moitié de ses œufs, plus un demi-œuf; puis les deux tiers du reste, plus un tiers d'œuf; puis les trois quarts du nouveau reste, plus un quart d'œuf. Comme il lui reste encore* 9 *œufs après cette troisième vente, on demande combien d'œufs elle avait d'abord.*

Les 9 œufs que la marchande a encore, augmentés d'un quart d'œuf, sont le quart de ce qui lui restait avant la troisième vente : elle avait donc alors $9\frac{1}{4} \times 4 = 37$ œufs.

Ces 37 œufs, augmentés d'un tiers d'œuf, sont le tiers de ce qui restait à la marchande avant la deuxième vente : elle avait donc alors $37\frac{1}{3} \times 3 = 112$ œufs.

Ces 112 œufs, augmentés d'un demi-œuf, sont la moitié de ce qu'avait la marchande avant la première vente : elle avait donc $112\frac{1}{2} \times 2 = \mathbf{225}$ œufs.

524. Problème **27**. *Trois voleurs ayant pris une bourse remplie d'écus, le plus fort prend* 13 *écus et les deux autres chacun une somme différente. Ils conviennent ensuite que celui qui a pris le plus, double aux deux autres le nombre de leurs écus, et que successivement le deuxième et le troisième en agissent de même à l'égard des deux autres. Chaque voleur se trouve alors avoir la même somme. Trouver combien contenait la bourse et ce que chaque voleur avait pris d'abord.*

Après que le troisième voleur a eu doublé la part des deux autres, chaque voleur s'est trouvé avoir le $\frac{1}{3}$ de la bourse.

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$
$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{12}$
$\frac{13}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{4}{24}$

Avant que le troisième voleur n'eût doublé la part des deux autres, le premier et le deuxième voleur n'avaient chacun que le $\frac{1}{6}$ de la bourse; ils avaient ensemble les $\frac{2}{6}$ de la bourse, et le troisième en avait les $\frac{4}{6}$.

Avant que le deuxième voleur n'eût doublé la part des deux autres, le premier voleur n'avait que le $\frac{1}{12}$ de la bourse; le troisième en avait les $\frac{4}{12}$, et le deuxième les $\frac{7}{12}$.

Avant que le premier voleur n'eût doublé la part des deux autres, le deuxième avait les $\frac{7}{24}$ de la bourse, le troisième les $\frac{4}{24}$, et le premier les $\frac{13}{24}$.

Mais, d'après l'énoncé, le premier voleur avait pris d'abord 13 écus.

Les $\frac{13}{24}$ de la bourse égalent donc 13 écus. Par suite, la bourse contenait **24** écus, et les quatre voleurs avaient pris respectivement **13**, **7** et **4** écus.

CHAPITRE VII

MÉTHODE DE FAUSSE POSITION

525. La *méthode de fausse position*, ou *méthode des hypothèses*, consiste à attribuer à l'inconnue d'un problème des valeurs arbitraires, à faire sur ces valeurs les opérations indiquées par l'énoncé, et à comparer les résultats obtenus à celui qu'on devrait obtenir, afin d'en déduire la correction à faire subir aux valeurs supposées pour avoir la vraie valeur de l'inconnue.

Cette méthode, peu élégante, mais très générale, suppose que *les variations des erreurs sont proportionnelles aux variations des valeurs attribuées à l'inconnue.*

526. Problème **28**. *Former la longueur du mètre avec* 30 *pièces d'argent, les unes de cinq francs, les autres de deux francs. Les pièces de cinq francs ont un diamètre de* 37^{mm} *et les pièces de deux francs un diamètre de* 27^{mm}.

Si l'on employait 30 *pièces de cinq francs*, la longueur obtenue serait de $37 \times 30 = 1110^{mm}$, soit 110^{mm} en trop.

Or, *chaque fois qu'on remplace une pièce de cinq francs par une pièce de deux francs, cet excès diminue de* $37 - 27 = 10^{mm}$.

Pour rendre l'excès nul, il faut donc remplacer $110 : 10 = 11$ pièces de cinq francs par autant de pièces de deux francs.

On prendra **11** pièces de deux francs et $30 - 11 = \mathbf{19}$ pièces de cinq francs.

On résoudrait d'une manière semblable les problèmes suivants :

Payer 100f *avec* 23 *pièces d'argent, les unes de* 5f *et les autres de* 2f;

Partager le nombre 100 *en deux parties telles que, si l'on divise l'une par* 7 *et l'autre par* 11, *la somme des quotients soit égale à* 12 (**509**).

527. Problème **29**. *L'âge d'un père est le septuple de celui de son fils; dans* 8 *ans, il n'en sera plus que le triple. Trouver l'âge du père et celui du fils.*

Supposons que le fils ait 12 *ans.* Le père en a sept fois autant ou 84. Dans 8 ans, le fils aura 12 + 8 ou 20 ans, et le père en aura 84 + 8 ou 92, tandis qu'il ne devrait en avoir que 3 fois 20 ou 60. Erreur en trop : 92 — 60 = 32 ans.

Supposons que le fils ait 11 *ans.* Le père en a sept fois autant ou 77. Dans 8 ans, le fils aura 11 + 8 ou 19 ans, et le père en aura 77 + 8 ou 85, tandis qu'il ne devrait en avoir que 3 fois 19 ou 57. Erreur en trop : 85 — 57 = 28 ans.

Supposons que le fils ait 10 *ans.* Le père en a sept fois autant ou 70. Dans 8 ans, le fils aura 10 + 8 ou 18 ans, et le père en aura 70 + 8 ou 78, tandis qu'il ne devrait en avoir que 3 fois 18 ou 54. Erreur en trop : 78 — 54 = 24 ans.

Ainsi, suivant que l'on suppose que le fils a 12, 11 ou 10 ans, il y a une erreur en trop de 32, 28 ou 24 ans; c'est-à-dire *chaque fois que l'on diminue d'un an l'âge du fils, l'erreur en trop diminue de* 4 *ans.* Pour que l'erreur en trop de 32 ans disparaisse, il faut donc diminuer l'âge supposé de 12 ans de 32 : 4 = 8 ans.

Donc le fils a 12 — 8 = **4** ans, et le père a 4 × 7 = **28** ans.

528. Problème **30**. *Trouver un nombre tel que si on le multiplie par* 4, *qu'on ajoute* 14 *au produit, qu'on divise la somme par* 3, *qu'on ajoute* 27 *au quotient, qu'on divise la somme par* 2 *et qu'on retranche* 10 *du quotient, on retrouve le nombre primitif.*

Si l'on fait les opérations indiquées sur les nombres *supposés* 1, 2, 3, on trouve, pour le résultat final, respectivement $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{6}$, $7\frac{5}{6}$, au lieu de 1, 2, 3 : l'erreur en trop est respectivement de $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{6}$, $4\frac{5}{6}$.

Or la différence entre $5\frac{1}{2}$ et $5\frac{1}{6}$ est $\frac{1}{3}$, et la différence entre $5\frac{1}{6}$ et $4\frac{5}{6}$ est aussi $\frac{1}{3}$.

Ainsi, *pour chaque unité que l'on ajoute au nombre* 1, *l'erreur* $5\frac{1}{2}$ *diminue de* $\frac{1}{3}$. Pour que toute l'erreur disparaisse, il faut donc ajouter, au nombre 1, $5\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 16\frac{1}{2}$. Donc le nombre cherché est $1 + 16\frac{1}{2}$ ou $\mathbf{17\frac{1}{2}}$.

***529.** Problème **31**. *Un père partage son héritage entre ses enfants de la manière suivante : le premier prendra* 1000^f *et le* $\frac{1}{10}$ *du reste; le deuxième,* 2000^f *et le* $\frac{1}{10}$ *du reste; le troisième,* 3000^f *et le* $\frac{1}{10}$ *du reste, et ainsi de suite. Il arrive que l'héritage est entièrement partagé et que les enfants ont reçu des parts égales. On demande la valeur de l'héritage, le nombre des enfants et la part de chacun d'eux.*

On suppose successivement que la somme à partager soit de 100000^f, de 99000^f, de 98000^f, et on trouve que les deux premières parts, au lieu d'être égales, diffèrent respectivement de 190^f, de 180^f, de 170^f.

Ainsi, *chaque fois que l'on diminue de* 1000^f *la somme à partager, la différence des deux premières parts diminue de* 10^f. Pour que cette différence devienne nulle, il faut donc diminuer la somme de 100000^f de 190 : 10 ou 19 fois 1000^f ou 19000^f. Par suite, la somme à partager est 100000 — 19000 = 81000^f.

L'héritage monte à **81000**^{f}; chaque enfant a reçu **9000**^{f} et il y avait **9** enfants.

On peut encore résoudre le même problème comme il suit :

L'avant-dernier des enfants prend un certain nombre de fois 1000^f, plus le $\frac{1}{10}$ du reste. Le dernier prend 1000^f de plus que n'a d'abord pris l'avant-dernier. Comme il ne reste alors plus rien, et que tous les enfants ont reçu la même part, le $\frac{1}{10}$ du reste, pris par l'avant-dernier enfant, égale donc 1000^f. Par suite, ce reste égale 10000^f; et, comme la part du dernier enfant égale les $\frac{9}{10}$ du même reste, le dernier enfant a donc eu 9000^f.

On conclut de là qu'il y avait **9** enfants, qui ont reçu chacun **9000**^{f}.

***530.** Problème **32**. *La somme de deux nombres est* $5\frac{5}{6}$ *et leur produit est* $8\frac{1}{3}$. *Quels sont ces deux nombres?*

Soit 1 *le premier nombre;* le second sera $4\frac{5}{6}$, et le produit des deux nombres sera $4\frac{5}{6}$ au lieu d'être $8\frac{1}{3}$. Différence en moins : $3\frac{1}{2}$.

Soit 2 *le premier nombre;* le second sera $3\frac{5}{6}$, et le produit des deux nombres sera $7\frac{2}{3}$ au lieu d'être $8\frac{1}{3}$. Différence en moins : $\frac{2}{3}$.

Soit 3 *le premier nombre;* le second sera $2\frac{5}{6}$, et le produit des deux nombres sera $8\frac{1}{2}$ au lieu d'être $8\frac{1}{3}$. Différence en trop : $\frac{1}{6}$.

Or, de $3\frac{1}{2}$ en moins à $\frac{2}{3}$ en moins, la variation est de $3\frac{1}{2} - \frac{2}{3} = 2\frac{5}{6}$, tandis que de $\frac{2}{3}$ en moins à $\frac{1}{6}$ en trop la variation est de $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

La *méthode des hypothèses* n'est donc pas applicable au problème proposé.

On verra plus loin comment on peut résoudre cette question (**656**).

CHAPITRE VIII

PARTAGES PROPORTIONNELS

531. *Partager un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés,* c'est le partager en parties dont chacune soit d'autant plus grande ou plus petite que le nombre correspondant est plus grand ou plus petit; ou, en d'autres termes, c'est *le partager en parties dont les rapports à ces nombres soient égaux entre eux.*

Partager un nombre en parties inversement proportionnelles à des nombres donnés, c'est le partager en parties dont chacune soit d'autant plus grande ou plus petite que le nombre correspondant est plus petit ou plus grand; ou, ce qui revient au même, c'est *le partager en parties proportionnelles aux inverses des nombres donnés* (**538**).

On peut, sans changer la grandeur des parties du nombre à partager, multiplier ou diviser les nombres donnés par un même nombre.

532. Problème **33**. *Partager le nombre* 700 *en parties proportionnelles aux nombres* 9, 12, 14.

Si l'on appelle x, y, z les trois parties, on a

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{14},$$

ou, en faisant la somme des numérateurs et celle des dénominateurs (**384**),

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{14} = \frac{x + y + z}{9 + 12 + 14},$$

ou, en remplaçant la somme $x + y + z$ par 700,

$$\frac{x}{9} = \frac{y}{12} = \frac{z}{14} = \frac{700}{35},$$

d'où

$x = \frac{700}{35} \times 9 = \mathbf{180}$, $y = \frac{700}{35} \times 12 = \mathbf{240}$, $z = \frac{700}{35} \times 14 = \mathbf{280}$.

On peut dire encore :

Sur 9 + 12 + 14 ou 35 unités, il y en a 9 pour la première partie, 12 pour la deuxième et 14 pour la troisième.

Sur 1 unité, il y a 35 fois moins pour chaque partie, ou $\frac{9}{35}$ pour la première, $\frac{12}{35}$ pour la deuxième et $\frac{14}{35}$ pour la troisième.

Enfin, sur 700 unités, il y a 700 fois plus pour chaque partie, ou

Pour la première partie . . . $\frac{9}{35} \times 700 = \mathbf{180}$;
Pour la deuxième partie . . . $\frac{12}{35} \times 700 = \mathbf{240}$;
Pour la troisième partie . . . $\frac{14}{35} \times 700 = \mathbf{280}$.

En général, *pour partager un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés, on le divise par la somme de ces nombres, et on multiplie le quotient par chacun des mêmes nombres.*

533. Problème **34**. *Partager le nombre* 777 *en parties proportionnelles aux nombres* $1\frac{1}{4}$, $3\frac{5}{8}$, $5\frac{11}{12}$.

Si l'on appelle x, y, z les trois parties, on a

$$\frac{x}{1\frac{1}{4}} = \frac{y}{3\frac{5}{8}} = \frac{z}{5\frac{11}{12}},$$

ou, en multipliant les conséquents par le commun dénominateur 24,

$$\frac{x}{30} = \frac{y}{87} = \frac{z}{142},$$

d'où (**532**)

$x = \frac{777}{259} \times 30 = \mathbf{90}$, $y = \frac{777}{259} \times 87 = \mathbf{261}$, $z = \frac{777}{259} \times 142 = \mathbf{426}$.

534. Problème **35**. *Partager le nombre* 531 *en quatre parties telles que la première soit à la seconde comme* 2 *est à* 3, *à la troisième comme* 4 *est à* 5, *et à la quatrième comme* 6 *est à* 7.

Si l'on appelle x, y, z, u les quatre parties, on a

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3},\qquad \frac{x}{4}=\frac{z}{5},\qquad \frac{x}{6}=\frac{u}{7},$$

ou, en réduisant les rapports $\frac{x}{2}$, $\frac{x}{4}$, $\frac{x}{6}$ au même dénominateur 12,

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{18},\qquad \frac{x}{12}=\frac{z}{15},\qquad \frac{x}{12}=\frac{u}{14},$$

ou

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{18}=\frac{z}{15}=\frac{u}{14},$$

d'où (**532**)

$$x=\tfrac{531}{59}\times 12=\mathbf{108},\quad y=\tfrac{531}{59}\times 18=\mathbf{162},$$
$$z=\tfrac{531}{59}\times 15=\mathbf{135},\quad u=\tfrac{531}{59}\times 14=\mathbf{126}.$$

535. Problème **36**. *Partager le nombre* 630 *en quatre parties telles que la première soit à la deuxième comme* 2 *est à* 3, *la deuxième à la troisième comme* 4 *est à* 5, *la troisième à la quatrième comme* 6 *est à* 7.

Si l'on appelle x, y, z, u les quatre parties, on a

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3},\qquad \frac{y}{4}=\frac{z}{5},\qquad \frac{z}{6}=\frac{u}{7},$$

ou, en réduisant les deux rapports $\frac{y}{3}$, $\frac{y}{4}$ au même dénominateur 12,

$$\frac{x}{8}=\frac{y}{12},\quad \frac{y}{12}=\frac{z}{15},\quad \frac{z}{6}=\frac{u}{7},\qquad \text{ou}\qquad \frac{x}{8}=\frac{y}{12}=\frac{z}{15},\quad \frac{z}{6}=\frac{u}{7},$$

ou, en réduisant les deux rapports $\frac{z}{15}$, $\frac{z}{6}$ au même dénominateur 30,

$$\frac{x}{16}=\frac{y}{24}=\frac{z}{30},\quad \frac{z}{30}=\frac{u}{35},\qquad \text{ou}\qquad \frac{x}{16}=\frac{y}{24}=\frac{z}{30}=\frac{u}{35},$$

d'où (**532**)

$$x=\tfrac{630}{105}\times 16=\mathbf{96},\quad y=\tfrac{630}{105}\times 24=\mathbf{144},$$
$$z=\tfrac{630}{105}\times 30=\mathbf{180},\quad u=\tfrac{630}{105}\times 35=\mathbf{210}.$$

536. Problème **37**. *Trois personnes ont gagné* 3600^{f} *dans une entreprise. Calculer la part de bénéfice qui revient à chacune, sachant que la première avait engagé* 5000^{f}, *la seconde* 6000^{f} *et la troisième* 7000^{f}.

Lorsque plusieurs personnes s'associent pour une même entreprise, on convient généralement que la part de gain ou de perte de chaque associé sera proportionnelle à sa mise.

Il suffit donc, pour résoudre le problème, de partager le bénéfice de 3600^f proportionnellement aux mises 5000^f, 6000^f, 7000^f, ou, plus simplement, proportionnellement aux nombres 5, 6, 7.

On trouve qu'il revient **1000^f** à la première personne, **1200^f** à la seconde et **1400^f** à la troisième.

On peut dire encore :

La somme des mises est 18000^f, et ces 18000^f de mise ont produit 3600^f de bénéfice; 1^f de mise a donc produit 18000 fois moins, ou $\frac{3600^f}{18000}$; et 5000^f, 6000^f, 7000^f de mise ont produit respectivement 5000 fois, 6000 fois, 7000 fois plus, ou

$$\frac{3600^f}{18000} \times 5000 = \mathbf{1000^f},$$

$$\frac{3600^f}{18000} \times 6000 = \mathbf{1200^f},$$

$$\frac{3600^f}{18000} \times 7000 = \mathbf{1400^f} \text{ (*)}.$$

***537.** Problème **38**. *Trois cantons doivent fournir un contingent de* 112 *soldats. La population du premier canton est de* 36914 *habitants, celle du second de* 25847 *habitants et celle du troisième de* 42503 *habitants. On demande de répartir le contingent d'après la population, aussi équitablement que possible.*

(*) Dans certains *problèmes de société,* on suppose que les mises ne sont pas restées pendant le même temps dans la société, et on admet, pour résoudre ces problèmes, que les parts dans le bénéfice ou la perte sont proportionnelles aux temps, comme elles le sont aux mises. Mais il faut bien avouer, dit Garcet, que ces sortes de questions ne peuvent avoir aucune application dans la vie commerciale. Il n'est guère admissible, en effet, qu'une personne qui entre, avec une certaine mise, dans une société déjà formée, participe aux bénéfices ou aux pertes qui ont pu se produire avant son admission; et il n'est pas plus rationnel qu'une personne, qui se retire de la société, participe, après son départ, aux bénéfices et aux pertes qui pourront se réaliser.

Jean Harroy, dans son *Traité d'Arithmétique,* publié à Liége en 1740, avait déjà fait la même remarque. « Ayant vu, dit-il, que, dans ces sortes de questions, les opérations sont fondées sur des principes si destitués de raisons solides, je me suis toujours exempté d'en proposer à mes écoliers. »

Si l'on partage le nombre 112 en parties proportionnelles aux nombres d'habitants des trois cantons, on trouve

Pour le premier canton. . . . 39°276;
Pour le deuxième canton. . . 27°501;
Pour le troisième canton. . . 45°223.

La répartition ne pouvant être faite qu'en nombres entiers, on demandera au premier canton **39** hommes, au deuxième **27**, au troisième **45**, en tout 111 hommes, et il restera un homme à demander en plus à l'un des trois cantons.

Si l'on attribue cet homme de plus au premier canton, l'augmentation éprouvée par ce canton sera 0°724, et l'augmentation éprouvée par chacun de ses habitants sera 0°724 : 36914 = 0°0000196.

Si on l'attribue au deuxième canton, l'augmentation éprouvée par ce canton sera 0°499, et l'augmentation éprouvée par chacun de ses habitants sera 0°499 : 25847 = 0°0000193.

Enfin, si on l'attribue au troisième canton, l'augmentation éprouvée par ce canton sera 0°777, et l'augmentation éprouvée par chacun de ses habitants sera 0°777 : 42503 = 0°0000183.

L'augmentation *relative* la plus petite est pour les habitants du troisième canton. On demandera donc **39** hommes au premier canton, **27** au deuxième et **46** au troisième.

538. Problème **39**. *Partager* 46 *oranges entre trois enfants, en raison inverse de leurs âges. Le premier a* 8 *ans, le second* 9 *ans et le troisième* 12 *ans.*

Supposons que, l'âge d'un enfant étant 1 an, sa part soit représentée par 1; si l'âge de l'enfant est de 8 ans, 9 ans, 12 ans, sa part sera respectivement 8 fois, 9 fois, 12 fois plus petite (**531**), ou égale à $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$. La question revient donc à partager 46 oranges proportionnellement aux nombres $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, ou, en multipliant ces fractions par leur commun dénominateur 72, proportionnellement aux nombres 9, 8, 6.

On trouve (**532**) qu'il faut donner **18** oranges au premier enfant, **16** au deuxième et **12** au troisième.

On voit qu'*au lieu de partager un nombre en parties inversement proportionnelles à des nombres donnés, il revient au même de le partager en parties proportionnelles aux inverses de ces nombres.*

539. Problème **40.** *Partager une gratification de* 520^f *entre deux employés, en raison directe du nombre de leurs enfants et du nombre de leurs années de service, et en raison inverse du chiffre de leurs appointements. Le premier a* 6 *enfants,* 15 *années de service et* 1800^f *d'appointements; le second a* 4 *enfants,* 12 *années de service et* 1600^f *d'appointements.*

Supposons que, le nombre des enfants étant 1, le temps de service 1 an et le traitement 1^f, la part de gratification soit représentée par 1.

Si le nombre des enfants est 6, le temps de service 1 an et le traitement 1^f, la part sera 6 fois plus grande, ou égale à 6.

Si le nombre des enfants est 6, le temps de service 15 ans et le traitement 1^f, la part sera 15 fois plus grande, ou égale à 6×15.

Enfin, si le nombre des enfants est 6, le temps de service 15 ans et le traitement 1800^f, la part sera 1800 fois plus petite, ou égale à $\frac{6 \times 15}{1800}$.

De même, si le nombre des enfants est 4, le temps de service 12 ans et le traitement 1600^f, la part de gratification sera égale à $\frac{4 \times 12}{1600}$.

La question revient donc à partager 520^f proportionnellement aux nombres $\frac{6 \times 15}{1800}$ et $\frac{4 \times 12}{1600}$, ou, plus simplement, proportionnellement aux nombres 5 et 3.

On trouve qu'il faut donner **325**^{f} au premier employé et **195**^{f} au second.

On voit que, *pour partager un nombre en parties proportionnelles à plusieurs séries de nombres donnés et inversement proportionnelles à d'autres séries de nombres donnés, il suffit de le partager en parties proportionnelles aux quotients obtenus en divisant les produits des premiers nombres respectivement par les produits des seconds.*

540. Problème **41.** *Calculer les dimensions d'un parallélépipède rectangle, sachant qu'elles sont proportionnelles aux nombres* 5, 7, 9 *et que le volume de ce parallélépipède est de* 8505 *centimètres cubes.*

Soient, en centimètres, x, y, z les trois dimensions du parallélépipède; son volume sera xyz, ou 8505 centimètres cubes. On a

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9},$$

ou, en observant que chacune de ces trois fractions est égale à la racine cubique de leur produit,

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} = \sqrt[3]{\frac{xyz}{315}} = \sqrt[3]{\frac{8505}{315}} = \sqrt[3]{27} = 3,$$

d'où $x = 15^{cm}$, $y = 21^{cm}$, $z = 27^{cm}$.

*541. Problème 42. *Calculer les dimensions d'un parallélépipède rectangle, sachant qu'elles sont proportionnelles aux nombres* 5, 7, 9 *et que la surface totale de ce parallélépipède est de* 2574 *centimètres carrés.*

Soient, en centimètres, x, y, z les trois dimensions du parallélépipède; sa surface totale sera $2xy + 2xz + 2yz$, ou 2574 centimètres carrés. On a

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9},$$

d'où, en faisant les produits deux à deux de ces fractions égales,

$$\frac{xy}{35} = \frac{xz}{45} = \frac{yz}{63} = \frac{xy + xz + yz}{35 + 45 + 63} = \frac{1287}{143} = 9,$$

ou, en observant que le produit de deux fractions égales est égal au carré de chacune de ces fractions,

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 = \left(\frac{y}{7}\right)^2 = \left(\frac{z}{9}\right)^2 = 9,$$

d'où, en extrayant la racine carrée,

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{9} = 3,$$

d'où $x = 15^{cm}$, $y = 21^{cm}$, $z = 27^{cm}$.

CHAPITRE IX

DES MOYENNES

542. On appelle, en général, *moyenne* entre plusieurs nombres, un nombre compris entre le plus grand et le plus petit de ces nombres.

Ainsi, quand on ajoute terme à terme plusieurs fractions inégales, la fraction obtenue est une moyenne entre la plus grande et la plus petite des fractions données (**384**).

En particulier, on appelle *moyenne arithmétique*, ou, simplement, *moyenne* de m nombres, le nombre que l'on obtient en divisant par m la somme de ces nombres. Ainsi la moyenne arithmétique des cinq nombres 4·8, 5, 5·4, 7·5, 8 est

$$\frac{4{\cdot}8 + 5 + 5{\cdot}4 + 7{\cdot}5 + 8}{5} = \mathbf{6{\cdot}14}\ (^*).$$

Les moyennes sont d'un usage fréquent dans les statistiques et les sciences d'observation.

***543**. Problème **43**. *On a mesuré trois fois la hauteur d'une montagne. On a trouvé, la première fois,* 4160^m; *la seconde fois,* 4145^m; *la troisième fois,* 4154^m. *Calculer la hauteur probable de cette montagne : 1° en supposant que les trois mesures aient été effectuées avec le même soin; 2° en admettant que l'on attribue à la seconde mesure le tiers et à la troisième le double du poids que l'on accorde à la première.*

On a, pour hauteur probable de la montagne, dans le premier cas,

$$\frac{4160 + 4145 + 4154}{3} = 4100 + \frac{60 + 45 + 54}{3} = \mathbf{4153^m},$$

et, dans le second cas,

$$\frac{4160.1 + 4145.\frac{1}{3} + 4154.2}{1 + \frac{1}{3} + 2} = 4100 + \frac{60.1 + 45.\frac{1}{3} + 54.2}{1 + \frac{1}{3} + 2} = \mathbf{4154{\cdot}9^m}.$$

(*) La *moyenne géométrique* de m nombres est la racine m^e du produit de ces nombres. Ainsi la moyenne géométrique des cinq nombres 4·8, 5, 5·4, 7·5, 8 est

$$\sqrt[5]{4{\cdot}8 \times 5 \times 5{\cdot}4 \times 7{\cdot}5 \times 8} = \mathbf{6}.$$

La *moyenne harmonique* de m nombres est le nombre dont l'inverse est la m^e partie de la somme des inverses de ces nombres. Ainsi la moyenne harmonique des cinq nombres 4·8, 5, 5·4, 7·5, 8 est

$$5 : \left(\frac{1}{4{\cdot}8} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5{\cdot}4} + \frac{1}{7{\cdot}5} + \frac{1}{8}\right) = 5\tfrac{20}{23}.$$

La moyenne arithmétique de plusieurs nombres est plus grande que leur moyenne géométrique, et celle-ci est plus grande que leur moyenne harmonique.

CHAPITRE X

DES MÉLANGES ET DES ALLIAGES

544. On appelle *alliage* le résultat de la combinaison ou mélange opéré par la fusion de deux ou de plusieurs métaux.

Les alliages sont, en général, plus durs que les métaux qui les composent; c'est pourquoi, dans la bijouterie et la fabrication des monnaies, on allie l'or et l'argent avec un peu de cuivre.

On appelle *lingot* tout morceau de métal fondu, pur ou allié, qui n'est ni ouvragé ni monnayé.

On peut considérer trois choses dans les alliages et dans les mélanges en général, savoir : les quantités des diverses substances que l'on allie ou que l'on mélange, le prix de ces substances et le prix de l'alliage ou du mélange.

Les *problèmes de mélange et d'alliage* ont pour objet la recherche de l'une quelconque de ces choses, quand on a certaines données sur les autres.

On suppose, à moins d'indication contraire, que le volume de l'alliage ou du mélange est égal à la somme des volumes des substances alliées ou mélangées.

545. Problème **44**. *On mélange* 50 *litres de vin à* 0·45ᶠ *le litre avec* 4 *litres à* 0·60ᶠ *et* 32 *litres à* 0·70ᶠ. *Quel est le prix du litre du mélange?*

50 litres à 0·45ᶠ valent 0·45ᶠ × 50 = 22·50ᶠ.
4 litres à 0·60ᶠ valent 0·60ᶠ × 4 = 2·40ᶠ.
32 litres à 0·70ᶠ valent 0·70ᶠ × 32 = 22·40ᶠ.

Les 86 litres du mélange valent donc 47·30ᶠ, et un litre du mélange vaut 47·30ᶠ : 86 = **0·55ᶠ**.

546. Problème **45**. *Le bronze des cloches contient* 78 *parties de cuivre et* 22 *d'étain. Le kilogramme de cuivre coûte* 2·95ᶠ *et le kilogramme d'étain* 3·15ᶠ. *Quelle est la dépense pour le métal d'une cloche de* 1000ᵏᵍ?

Une cloche de 1000^k renferme 780^k de cuivre et 220^k d'étain ; la dépense pour le métal sera donc

$$2^{\cdot}95^f.780 + 3^{\cdot}15^f.220 = 2301^f + 693^f = \mathbf{2994^f}.$$

547. Problème **46**. *Dans quelle proportion faut-il mélanger du vin à* $0^{\cdot}65^f$ *le litre avec du vin à* $0^{\cdot}90^f$ *pour obtenir du vin à* $0^{\cdot}80^f$?

En vendant le premier vin à $0^{\cdot}80^f$, *on gagnerait* $0^{\cdot}15^f$ par litre, et, en vendant le second vin à $0^{\cdot}80^f$, *on perdrait* $0^{\cdot}10^f$ par litre.

Si donc on vendait à $0^{\cdot}80^f$ 10 litres du premier vin et 15 litres du second, *on gagnerait*, d'une part, **10 fois $0^{\cdot}15^f$**, et *on perdrait*, de l'autre, **15 fois $0^{\cdot}10^f$** : il y aurait ainsi compensation entre le gain et la perte.

On prendra donc, pour faire le mélange demandé, 10 litres du premier vin sur 15 litres du second, ou, plus simplement, **2** litres du premier sur **3** du second.

On voit que *les quantités cherchées sont inversement proportionnelles aux différences des prix de chaque substance au prix moyen.*

548. Problème **47**. *Faire du vin à* $0^{\cdot}80^f$ *le litre avec du vin à* $1^{\cdot}10^f$, *à* 1^f, *à* $0^{\cdot}90^f$, *à* $0^{\cdot}75^f$, *à* $0^{\cdot}70^f$ *et à* $0^{\cdot}60^f$ *le litre.*

Ce problème est *indéterminé*, c'est-à-dire qu'il admet une infinité de solutions. On peut avoir *une* solution de la manière suivante :

Les différences des prix supérieurs au prix moyen sont : $0^{\cdot}30^f$, $0^{\cdot}20^f$, $0^{\cdot}10^f$; total, $0^{\cdot}60^f$. Les différences des prix inférieurs au prix moyen sont : $0^{\cdot}05^f$, $0^{\cdot}10^f$, $0^{\cdot}20^f$; total, $0^{\cdot}35^f$. Pour faire le mélange demandé, on peut donc prendre **35** litres de chacune des trois qualités supérieures sur **60** litres de chacune des trois qualités inférieures (**547**).

*On peut avoir *trente-six* autres solutions de la manière suivante :

Prix supérieurs	110	**5**	**1**
	100	**10**	**1**
	90	**20**	**2**
Prix moyen : 80			
Prix inférieurs	75	**30**	**6**
	70	**20**	**2**
	60	**10**	**1**

Ayant disposé, comme on le voit ci-contre, d'une part, les trois prix supérieurs, *dans un ordre quelconque*, et, de l'autre, les trois prix inférieurs, aussi *dans un ordre quelconque*, on écrit, vis-à-vis des prix supérieurs,

les trois différences des prix inférieurs au prix moyen, et, vis-à-vis des prix inférieurs, les trois différences des prix supérieurs au prix moyen : les nombres écrits vis-à-vis des prix des différents vins indiquent dans quelles proportions on peut prendre de ces vins pour faire le mélange demandé.

En adoptant, par exemple, la disposition ci-dessus, on trouve qu'on peut prendre **5** litres de la première qualité, **10** de la deuxième, **20** de la troisième, **30** de la quatrième, **20** de la cinquième et **10** de la sixième.

En effet, en mêlant 5 litres de la première qualité avec 30 litres de la quatrième, 10 litres de la deuxième avec 20 litres de la cinquième, et 20 litres de la troisième avec 10 litres de la sixième, on forme trois mélanges partiels, chacun à 0'80^{f} le litre (**547**) : tel est donc aussi le prix du litre du mélange total.

On obtient autant d'autres solutions qu'on le veut *en multipliant ou en divisant par un même nombre deux différences correspondantes.*

On trouve, par exemple, qu'on peut prendre **1** litre de la première qualité, **1** de la deuxième, **2** de la troisième, **6** de la quatrième, **2** de la cinquième et **1** de la sixième.

Si les prix supérieurs et les prix inférieurs n'étaient pas en nombre égal, on les ramènerait à un même nombre en écrivant plusieurs fois l'un des prix qui seraient en nombre moindre.

549. Problème **48.** *Un négociant a deux qualités de café : quand il les mélange dans le rapport de* 3 *à* 2, *le kilogramme vaut* 2'79^{f}; *quand il les mélange dans le rapport de* 5 *à* 4, *le kilogramme vaut* 2'75^{f}. *Trouver le prix du kilogramme de chaque qualité.*

On observe que 3^{k} du premier café plus 2^{k} du second valent 5 fois 2'79^{f}, ou 13'95^{f}, et que 5^{k} du premier café plus 4^{k} du second valent 9 fois 2'75^{f}, ou 24'75^{f}; puis on achève la solution par la *méthode de réduction au même coefficient* (**508**).

On trouve que le kilogramme du premier café vaut **3'15**^{f} et le kilogramme du second café **2'25**^{f}.

CHAPITRE XI

DU TITRE DES MATIÈRES D'OR ET D'ARGENT

550. On appelle *titre* d'un alliage d'or ou d'argent le rapport du poids de l'or ou de l'argent au poids total de l'alliage.

On exprime ordinairement le titre en *millièmes* (**452**, **447**, **455**, **462**).

On dit, par exemple, qu'un alliage d'argent est au titre de 0·900, lorsqu'il renferme les 0·900 de son poids d'argent; ou, en d'autres termes, lorsque, sur 1000 parties de son poids, il en renferme 900 de métal *fin* ou d'argent, et 100 de métal *vil* ou *commun*.

551. Problème **49.** *Quel est le titre d'un lingot qui contient* 14^k *d'or fin et* 2^k *de cuivre?*

Le titre de ce lingot est le rapport du poids d'or fin qu'il contient ou 14^k à son poids total ou 16^k; ce titre est donc $14 : 16 =$ **0·875**.

On peut dire encore :

Ce lingot renferme 14^k d'or fin sur un poids total de 16^k : il renferme donc les $\frac{14}{16}$ ou les 0·875 de son poids d'or fin, c'est-à-dire qu'il est au titre de **0·875**.

552. Problème **50.** *Quel est le poids d'or fin contenu dans* 16^k *d'or au titre de* 0·875?

Ce poids est égal aux 0·875 de 16^k, ou à $16^k \times 0{\cdot}875 =$ **14^k**.

553. Problème **51.** *Quel est le poids total d'un lingot, au titre de* 0·875, *qui renferme* 14^k *d'or fin?*

Les 14^k d'or fin sont les $\frac{875}{1000}$ du poids total; le $\frac{1}{1000}$ du poids total égale donc $\frac{14^k}{875}$, et le poids total égale $\frac{14^k \times 1000}{875} =$ **16^k**.

On peut dire encore :

Chaque kilogramme du lingot renferme $0{\cdot}875^k$ d'or fin. Puisque le lingot renferme 14^k d'or fin, il pèse autant de kilogrammes que $0{\cdot}875^k$ d'or fin sont contenus de fois dans 14^k d'or fin, ou $14 : 0{\cdot}875 =$ **16^k**

554. On voit :

1° Que *le titre d'un alliage est égal au poids de métal fin qu'il renferme divisé par son poids total ;*

2° Que *le poids de métal fin est égal au poids total multiplié par le titre;*

3° Que *le poids total est égal au poids de métal fin divisé par le titre* (*).

555. Problème **52.** *On fond ensemble trois lingots d'or, l'un de* 8^k, *au titre de* 0·859, *l'autre de* 10^k, *au titre de* 0·811, *et le troisième de* 6^k, *au titre de* 0·923. *On demande quel sera le titre de l'alliage.*

8^k d'or au titre de 0·859 renferment $8^k \times 0{\cdot}859 = 6{\cdot}872^k$ d'or fin.

10^k d'or au titre de 0·811 renferment $10^k \times 0{\cdot}811 = 8{\cdot}110^k$ d'or fin.

6^k d'or au titre de 0·923 renferment $6^k \times 0{\cdot}923 = 5{\cdot}538^k$ d'or fin.

Les 24^k de l'alliage renferment donc $20{\cdot}520^k$ d'or fin, et, par suite, le titre de cet alliage est $20{\cdot}520 : 24 = \mathbf{0{\cdot}855}$.

556. Problème **53.** *Quelle quantité faut-il prendre de deux lingots d'or, l'un au titre de* 0·925 *et l'autre au titre de* 0·840, *pour former un alliage de* 51^k *d'or au titre de* 0·900?

Le titre du premier or est *en excès* sur le titre à obtenir de 0·025, et le titre du second or est *en défaut* sur le titre à obtenir de 0·060.

L'alliage devant être fait de manière que l'*excès* compense le *défaut*, on prendra 60^k du premier or sur 25^k du second.

Ainsi, sur 60 + 25 ou 85^k de l'alliage, il y a 60^k du premier lingot et 25^k du second lingot.

Sur 1^k de l'alliage, il y a $\frac{60^k}{85}$ du premier lingot et $\frac{25^k}{85}$ du second lingot.

Enfin, sur 51^k de l'alliage, il y a $\frac{60^k}{85} \times 51 = \mathbf{36^k}$ du premier lingot et $\frac{25^k}{85} \times 51 = \mathbf{15^k}$ du second lingot.

557. Problème **54.** *La pièce d'argent de cinq francs est au titre de* 0·900, *et son poids est de* 25^g, *avec une tolérance en dehors ou en dedans*

(*) Si l'on appelle P le poids total d'un alliage, p le poids de métal fin qu'il renferme, et T son titre, on a

$$T = \frac{p}{P}, \qquad p = PT, \qquad P = \frac{p}{T}.$$

de 2 millièmes sur le titre et de 3 millièmes sur le poids. Quel est le titre le plus fort et le titre le plus faible, le poids le plus fort et le poids le plus faible de la pièce de cinq francs?

1° Le *titre droit* étant de 0·900 et la *tolérance* de 2 millièmes *en dehors* ou *en dedans*, c'est-à-dire en plus ou en moins, le titre le plus fort de la pièce de cinq francs est 0·900 + 0·002 = **0·902**, et son titre le plus faible est 0·900 − 0·002 = **0·898**.

2° Les 3 millièmes de 25^g égalent $0·075^g$; le poids le plus fort de la pièce de cinq francs est donc $25^g + 0·075^g$ = **$25·075^g$**, et son poids le plus faible est $25^g - 0·075^g$ = **$24·925^g$**.

558. Problème **55**. *L'unité de monnaie étant le franc d'argent, au titre de* 0·900, *trouver la valeur réelle, ou au pair, de la pièce d'argent d'un franc, qui est au titre de* 0·835.

1^f de valeur nominale au titre de 0·900 a une valeur réelle de 1^f.

1^f	»	»	0·001	»	$\frac{1}{900}^f$.
1^f	»	»	0·835	»	$\frac{835}{900}^f$.

La valeur au pair de la pièce d'argent d'un franc est $\frac{835}{900}^f$ ou **$0·93^f$**.

559. Problème **56**. 5^g *d'argent monnayé, au titre de* 0·900, *valent* 1^f, *et l'or monnayé vaut, à poids égal et à titre égal,* $15\frac{1}{2}$ *fois autant que l'argent. De plus, la retenue à opérer, pour frais de fabrication des monnaies d'or et d'argent, sur les matières versées au change, était fixée, avant la suspension de la frappe de l'argent en* 1876, *à* $1·50^f$ *par kilogramme d'argent au titre de* 0·900 *et à* $6·70^f$ *par kilogramme d'or au même titre. Trouver :* 1° *le prix d'un kilogramme d'or ou d'argent monnayé, au titre de* 0·900; 2° *le prix, au change, d'un kilogramme d'or ou d'argent, au titre de* 0·900; 3° *le prix, au change, d'un kilogramme d'or ou d'argent pur.*

1° 5^g d'argent monnayé, au titre de 0·900, valent 1^f; 1^g vaut 5 fois moins, ou $0·20^f$, et 1000^g, ou 1^k, valent 1000 fois plus, ou **200^f**.

1^k d'argent monnayé, au titre de 0·900, valant 200^f, 1^k d'or monnayé, au même titre, vaut $15\frac{1}{2}$ fois 200^f, ou **3100^f**.

2° Le prix, au change, d'un kilogramme d'argent, au titre de 0·900, est $200^f - 1·50^f$ = **$198·50^f$**.

Le prix, au change, d'un kilogramme d'or, au titre de 0·900, est $3100^f - 6{\cdot}70^f = \mathbf{3093{\cdot}30^f}$.

3° 1^k d'argent, au titre de 0·900, vaut, au change, $198{\cdot}50^f$; au titre de 0·001, il vaut 900 fois moins, ou $\frac{198{\cdot}50^f}{900}$; au titre de 1000 millièmes, il vaut 1000 fois plus, ou $\frac{198{\cdot}50^f}{900} \times 1000 = \mathbf{220\frac{5^f}{9}}$.

De même, 1^k d'or pur vaut, au change, $\frac{3093{\cdot}30^f}{900} \times 1000 = \mathbf{3437^f}$.

560. Problème **57**. *Le souverain d'or ou livre sterling d'Angleterre est à la taille de* $46\frac{29}{40}$ *à la livre, au titre de* $\frac{11}{12}$. *Quelle est la valeur au pair de cette pièce? La livre troy d'Angleterre vaut* $373{\cdot}242^g$.

Appelant x la valeur, en francs, de la livre sterling, on a (**516**) :

x francs	1 livre sterling;
$46\frac{29}{40}$ livres sterling	1 livre or monnayé;
1 livre or monnayé	$\frac{11}{12}$ de livre or fin;
1 livre or fin	373·242 grammes or fin;
0·9 de gramme or fin	1 gramme or monnayé;
1 gramme or monnayé . . .	3·10 francs;

d'où

$$x = \frac{\frac{11}{12} \times 373{\cdot}242 \times 3{\cdot}10}{46\frac{29}{40} \times 0{\cdot}9} = \mathbf{25{\cdot}22^f}.$$

561. Problème **58**. *A combien de deniers sterling d'or, au titre standard ou légal de* $\frac{11}{12}$, *équivaut une once d'argent, au titre standard ou légal de* $\frac{37}{40}$, *si l'on estime à* $15\frac{1}{2}$ *le rapport de l'or à l'argent? La livre sterling vaut* 12 *shillings de* 12 *pence ou deniers, et elle est à la taille de* $46\frac{29}{40}$ *à la livre troy, au titre de* $\frac{11}{12}$. *La livre troy vaut* 12 *onces.*

Appelant x le nombre de deniers d'or à $\frac{11}{12}$ équivalent à une once d'argent à $\frac{37}{40}$, on a (**516**) :

x deniers sterling or à $\frac{11}{12}$ . .	1 once argent à $\frac{37}{40}$;
12 onces argent à $\frac{37}{40}$. . . .	1 livre troy argent à $\frac{37}{40}$;
1 livre troy argent à $\frac{37}{40}$ . .	$\frac{37}{40}$ livre troy argent fin;
1 livre troy argent fin . . .	$\frac{12}{11}$ livre troy argent à $\frac{11}{12}$;
$15\frac{1}{2}$ livres troy argent à $\frac{11}{12}$ . .	1 livre troy or à $\frac{11}{12}$;
1 livre troy or à $\frac{11}{12}$. . . .	$46\frac{29}{40}$ livres sterling or à $\frac{11}{12}$;
1 livre sterling or à $\frac{11}{12}$. . .	240 deniers sterling or à $\frac{11}{12}$;

d'où

$$x = \frac{\frac{37}{40} \times \frac{12}{11} \times 46\frac{29}{40} \times 240}{12 \times 15\frac{1}{2}} = \frac{207459}{3410} = 60{\cdot}838.$$

Le pair monétaire de l'argent, équivalent au rapport $15\frac{1}{2}$, est donc, en mesures anglaises, de **60·838** deniers d'or à $\frac{11}{12}$ pour une once d'argent à $\frac{37}{40}$. On le prend habituellement égal à **$60\frac{7}{8}$** deniers.

562. Problème **59**. *Le pair monétaire de l'argent étant de* $60\frac{7}{8}$ *deniers par once standard, quel sera, au cours de* $31\frac{5}{8}$ *deniers, la valeur du yen du Japon, le poids de cette pièce étant de* 26·956^g *et son titre de* 0·9?

La valeur, au pair, du yen est de 0·20^f × 26·956 = 5·3912^f.

Au cours de $31\frac{5}{8}$ deniers, cette valeur est réduite à $31\frac{5}{8} : 60\frac{7}{8}$, ou à $\frac{253}{487}$.

A ce cours, la valeur du yen est donc de 5·3912^f × $\frac{253}{487}$ = **2·80^f**.

CHAPITRE XII

DES POIDS SPÉCIFIQUES

563. On appelle *poids spécifique* ou *densité* d'un corps le rapport du poids d'un certain volume de ce corps au poids d'un égal volume d'eau.

Dire, par exemple, que le poids spécifique d'un corps est 7, c'est dire que ce corps, *à volume égal*, pèse 7 fois autant que l'eau.

564. Problème **60**. 6^{cm3} *d'argent pèsent* 63^g. *Quel est le poids spécifique de l'argent?*

6^{cm3} d'argent pèsent 63^g, et 6^{cm3} d'eau pèsent 6^g. Or la densité d'un corps est le rapport du poids d'un volume quelconque de ce corps au poids d'un égal volume d'eau. Donc la densité de l'argent est 63 : 6 = **10·5.**

565. Problème **61**. *Le poids spécifique de l'argent est* 10·5. *Quel est le poids de* 6^{cm3} *d'argent?*

1^{cm3} d'argent pèse 10·5^g. Donc 6^{cm3} d'argent pèsent 6 fois 10·5^g, ou 10·5 × 6 = **63^g.**

566. Problème **62**. *Le poids spécifique de l'argent est* 10·5. *Quel est le volume d'un lingot d'argent pesant* 63^g?

1^{cm3} d'argent pèse 10·5^g. Donc 63^g sont le poids d'autant de centimètres cubes d'argent que 10·5^g sont contenus de fois dans 63^g, ou 63 : 10·5 = **6^{cm3}**.

567. On voit :

1° Que *la densité d'un corps est égale à son poids divisé par son volume;*

2° Que *le poids d'un corps est égal à son volume multiplié par sa densité;*

3° Que *le volume d'un corps est égal à son poids divisé par sa densité.*

Le poids est exprimé en grammes, en kilogrammes ou en tonnes, suivant que le volume est exprimé en centimètres cubes, en décimètres cubes ou en mètres cubes, et réciproquement (**420**) (*).

568. Problème **63.** *Calculer le volume de la pièce d'argent de cinq francs, sachant que la densité de l'argent est* 10·5 *et celle du cuivre* 8·85.

La pièce d'argent de 5^f pèse 25^g, dont $22·5^g$ d'argent fin et $2·5^g$ de cuivre.

Le volume de $22·5^g$ d'argent est $22·5 : 10·5 = 2·143^{cm3}$.

Le volume de $2·5^g$ de cuivre est $2·5 : 8·85 = 0·282^{cm3}$.

En supposant que l'alliage se fasse sans contraction ni dilatation, le volume de la pièce d'argent de 5^f est donc $2·143 + 0·282 = \mathbf{2·425^{cm3}}$.

569. Problème **64.** *L'argyrose ou sulfure d'argent se compose de* 27 *parties d'argent et de* 8 *parties de soufre. La densité de l'argent est* 10·5 *et celle du soufre* 2·07. *Trouver la densité de l'argyrose, en supposant que dans l'acte de la combinaison le volume subisse une contraction de* $\frac{1}{4}$.

Le volume de 27^g d'argent est $27 : 10·5 = 2·571^{cm3}$.

Le volume de 8^g de soufre est $8 : 2·07 = 3·865^{cm3}$.

S'il n'y avait pas de contraction, le volume de la combinaison de 27^g d'argent avec 8^g de soufre serait $2·571 + 3·865 = 6·436^{cm3}$.

Mais, puisqu'il y a contraction de $\frac{1}{4}$, le volume de 35^g d'argyrose n'est que les $\frac{3}{4}$ de $6·436^{cm3}$, ou $6·436^{cm3} \times \frac{3}{4} = 4·827^{cm3}$.

Par suite, la densité de l'argyrose est $35 : 4·827 = \mathbf{7·25}$.

570. Problème **65.** *La densité d'un corps étant* $19\frac{1}{4}$, *quelle fraction de son poids ce corps perd-il dans l'eau? On connaît ce principe d'*Archimède, *qu'un corps, plongé dans un fluide, y perd une partie de son poids, égale au poids du fluide déplacé.*

(*) Si l'on appelle P le poids d'un corps, V son volume et D sa densité, on a

$$D = \frac{P}{V}, \qquad P = VD, \qquad V = \frac{P}{D}.$$

1^{cm3} du corps pèse $19\frac{1}{4}^{g}$; d'autre part, 1^{cm3} du corps déplace 1^{cm3} ou 1^{g} d'eau. La perte de poids dans l'eau est donc de 1^{g} sur $19\frac{1}{4}^{g}$, c'est-à-dire que le corps perd $1 : 19\frac{1}{4}$ ou les $\frac{4}{77}$ de son poids.

En général, *tout corps, pesé dans l'eau, y perd une partie de son poids, égale à l'inverse de sa densité.*

571. Problème **66**. *D'après* Vitruve, *la couronne de* Hiéron, *roi de* Syracuse, *pesait* 20 *livres;* Archimède *trouva qu'elle perdait dans l'eau* $1\frac{1}{4}$ *livre de son poids. Trouver le poids d'or et le poids d'argent qu'elle renfermait, sachant que la densité de l'or est* $19\frac{1}{4}$ *et celle de l'argent* $10\frac{1}{2}$.

La densité de l'or étant $19\frac{1}{4}$, une livre d'or perd, dans l'eau, $1^{l} : 19\frac{1}{4} = \frac{4}{77}$ de livre (**570**).

De même, une livre d'argent perd, dans l'eau, $1^{l} : 10\frac{1}{2} = \frac{2}{21}$ de livre.

Cela étant, on dira, en employant la *méthode de fausse position* (**525**) :

Si toute la couronne eût été d'or, elle aurait perdu, dans l'eau, $\frac{4}{77} \times 20 = 1\frac{3}{77}$ livre, c'est-à-dire $1\frac{1}{4} - 1\frac{3}{77} = \frac{65}{308}$ de livre de moins qu'elle n'en perdait réellement. Or, chaque fois qu'on remplace une livre d'or par une livre d'argent, la perte de poids dans l'eau augmente de $\frac{2}{21} - \frac{4}{77} = \frac{10}{231}$ de livre. Donc la couronne renfermait autant de livres d'argent que $\frac{10}{231}$ de livre sont contenus de fois dans $\frac{65}{308}$ de livre, ou $\frac{65}{308} : \frac{10}{231} = 4\frac{7}{8}$ livres.

La couronne renfermait $4\frac{7}{8}$ livres d'argent et $15\frac{1}{8}$ livres d'or.

CHAPITRE XIII

DU TANT POUR CENT OU POUR MILLE

572. Il est d'usage, dans beaucoup de questions, de rapporter au nombre 100 ou 1000 les variations de certaines quantités.

On évalue, par exemple, à tant pour cent les profits et les pertes, les réductions à faire sur les paiements ou sur le poids des marchandises, les droits de commission, l'intérêt, l'escompte, etc.

Pour abréger, on écrit $\frac{0}{0}$ ou $\frac{0}{00}$ au lieu de *pour cent* et *pour mille.*

Dans la résolution des problèmes de *percentage,* on observera qu'augmenter un nombre de $5\frac{0}{0}$, par exemple, c'est lui ajouter ses $\frac{5}{100}$, ou le

multiplier par **1·05**; de même, diminuer un nombre de $5\frac{0}{0}$, c'est en retrancher ses $\frac{5}{100}$, ou le multiplier par **0·95**.

Des pertes et des bénéfices.

573. Problème **67**. *Un marchand paie* 210^f *pour* 14^m *de drap. Combien doit-il revendre le mètre pour avoir* $12\frac{0}{0}$ *de bénéfice?*

Ce qui a coûté 100^f doit être revendu 112^f.

Ce qui a coûté 1^f doit être revendu 100 fois moins, ou $1·12^f$.

Et ce qui a coûté 210^f doit être revendu 210 fois plus, ou $235·20^f$.

Le marchand doit donc revendre le mètre $235·20^f : 14 =$ **$16·80^f$**.

574. Problème **68**. *En revendant un cheval pour* 825^f, *on gagne* $10\frac{0}{0}$ *sur le prix d'achat. Combien ce cheval avait-il coûté? Combien a-t-on gagné pour cent sur le prix de vente?*

1° Ce qu'on revend 110^f a coûté 100^f.

Ce qu'on revend 1^f a coûté 110 fois moins, ou $\frac{100^f}{110}$.

Et ce qu'on revend 825^f a coûté 825 fois plus, ou $\frac{100^f \times 825}{110} = 750^f$.

Le cheval avait coûté **750^f**.

2° Sur le prix de vente 825^f on a gagné $825^f - 750^f = 75^f$.

Sur 1^f on a gagné $\frac{75}{825}^f$.

Et sur 100^f on a gagné $\frac{75^f \times 100}{825} = 9\frac{1}{11}^f$.

On a gagné $\mathbf{9\frac{1}{11}}\ \frac{0}{0}$ sur le prix de vente.

575. Problème **69**. *Le filage du coton coûte les* $\frac{9}{10}$ *du prix du coton brut, et le filateur, en vendant ses produits, gagne* $10\frac{0}{0}$ *sur le prix de revient. Le tissage coûte les* $\frac{8}{10}$ *du prix d'achat du coton filé, et le manufacturier se réserve à son tour un bénéfice de* $15\frac{0}{0}$ *sur le prix de revient, quand il cède l'étoffe au marchand. Enfin, ce dernier vend ses étoffes en gagnant* $20\frac{0}{0}$ *sur le prix d'achat en fabrique. On propose, d'après cela, de calculer ce que le consommateur paie pour une pièce de coton pesant* 1^k, *en supposant que le quintal de coton brut coûte* 50^f.

Le kilogramme du *coton brut* coûte $0·50^f$.

Le kilogramme de *coton filé* coûte $0·50^f \times 1·9 = 0·95^f$, et il est vendu par le filateur $0·95^f \times 1·10 = 1·045^f$.

Le kilogramme de *coton tissé* coûte 1·045f × 1·8 = 1·881f, et il est vendu par le manufacturier 1·881f × 1·15 = 2·16315f.

Enfin, le marchand vend le kilogramme 2·16315f × 1·20 = 2·59578f, soit **2·60f**.

De la remise ou rabais ou escompte.

576. Problème **70.** *Un libraire achète* 78 *volumes cotés* 1·25f, *avec une remise de* 15 0/0 *et* 13 *pour* 12. *Il les revend au prix marqué. Calculer ce qu'il a payé, et ce qu'il a gagné pour cent.*

Prix de 72 exemplaires à 1·25f	90·00f
Remise de 15 0/0	13·50
Somme payée par le libraire.	**76·50**
Prix de la vente de 78 exemplaires à 1·25f	97·50
Bénéfice du libraire	21·00

Le libraire a gagné 21f sur 76·50f, ou **27·45 0/0**.

Prime ou perte sur l'or et l'argent.

577. Sur le marché des métaux précieux, l'or se cote sur la base de 3437f le kilogramme pur, terme fixe, avec tant pour mille de prime ou de perte.

De même, l'argent se cote sur la base de 218·89f le kilogramme pur, terme fixe, avec tant pour mille de prime ou de perte.

Le prix de l'or et de l'argent varie proportionnellement au titre.

578. Problème **71.** *Calculer la valeur commerciale :* 1° *d'un lingot d'or de* 3·25k, *au titre de* 0·840 ; 2° *de la pièce d'argent roumaine de* 5 *leys, du poids de* 25g, *au titre de* 0·900. *Le cours est de* 3437f *pour l'or, avec* 3½ 0/00 *de prime, et de* 218·89f *pour l'argent, avec* 284 0/00 *de perte.*

1° Prix de 3·25k or à 0·840 : 3437f × 3·25 × 0·840 =	9383·01f
Prime de 3½ 0/00	32·84
Valeur du lingot d'or	**9415·85**
2° Prix de 25g argent à 0·900 : 218·89f × 0·025 × 0·9 =	4·925f
Perte de 284 0/00	1·399
Valeur de la pièce de 5 leys	**3·526**

Il reviendrait au même de faire porter sur le poids la prime ou la perte.

De la tare.

579. On appelle *poids brut* le poids d'une marchandise avec ses emballages; *poids net*, le poids de la marchandise seule, et *tare*, la différence entre ces deux poids.

On appelle *réfaction* une diminution de poids ou de prix que le vendeur accorde à l'acheteur, parce que la marchandise n'est pas de l'espèce ou de la qualité convenue.

Enfin, on appelle *bon poids*, *don*, *surdon* une bonification que le vendeur, négociant en gros, accorde à l'acheteur, négociant en détail, et qui consiste en ce que celui-ci reçoit un peu plus en poids ou en nombre que ce qu'on lui fait payer.

La *tare*, la *réfaction* et le *bon poids* se calculent ordinairement à tant pour cent sur le poids brut des marchandises.

580. Problème **72.** *Le* 1er *mai* 1896, M. Martin, *d'Anvers, a acheté au comptant, à* M. Simon, *de la même ville, 20 barriques de riz de la Caroline, long grain, pesant brut* 6250k, *à* 36f *les* 50k. *Combien* M. Martin *a-t-il payé? La tare est de* 12% *et l'escompte de* 2%.

On trouve que M. Martin a payé **3880f 80f**, pour laquelle somme M. Simon lui aura remis *facture* acquittée, comme il suit :

ANVERS, 1er mai 1896.

M. Martin *doit à* M. Simon, *de cette ville, pour vente et livraison à lui faites de ce qui suit, payable au comptant :*

20 *barriques riz Caroline long grain :*				
Brut	6250k			
Tare 12% . . .	750			
Net.	5500	à 36f les 50k	3960	00
		Escompte 2%	79	20
Pour acquit,			**3880**	**80**
Simon.				

Des assurances.

581. On entend par *prime d'assurances* la somme que l'on paie, chaque année, à une Compagnie qui répond des dommages que peuvent éprouver les marchandises, les bâtiments, les récoltes, etc. La première année, on ajoute à cette somme le prix de la *police*, c'est-à-dire du contrat passé avec la Compagnie.

582. Problème **73.** *Une maison est assurée contre l'incendie pour* 60 000^{f}. *Quel est le montant de la prime, à raison de* 0'40^{f} *pour mille?*

Si pour 1000^{f} on paie 0'40^{f}, pour 60 000^{f} on paiera 60 fois 0'40^{f}, ou **24**^{f}.

Des centimes additionnels.

583. On appelle *centimes additionnels* des contributions ajoutées au principal des contributions directes, et exprimées par le nombre de centimes que l'on doit payer pour chaque franc de contributions directes.

584. Problème **74.** *Une commune, dont les habitants paient* 23 762'50^{f} *de contributions directes, doit pourvoir à une nouvelle charge annuelle de* 7604^{f}. *Combien doit-elle s'imposer de centimes additionnels? Quelle sera la majoration pour le contribuable qui paie aujourd'hui* 63^{f} *de contributions directes?*

Il faut ajouter, aux 23 762'50^{f} de contributions directes, un impôt de 7604^{f}, soit, par franc de contributions directes, 7604^{f} : 23 762'50 = 0'32^{f}. Ainsi la commune doit s'imposer **32** centimes additionnels.

Le contribuable, qui paie 63^{f} de contributions directes, sera imposé en plus, au profit de la commune, de 63 fois 0'32^{f}, ou de **20'16**^{f}.

Évaluations diverses à tant pour cent ou pour mille.

585. Problème **75.** *La construction d'une maison a coûté* 12 750^{f}. *Elle est bâtie au milieu d'un terrain rectangulaire de* 75^{m} *de long sur* 28^{m} *de large, qui a été payé à raison de* 70^{f} *l'are. Combien faut-il louer la propriété, pour qu'elle donne* 5 $\frac{0}{0}$ *de revenu?*

Surface du terrain : $75^m \times 28^m = 2100^{m2}$ ou 21 ares.

Prix de ce terrain : $70^f \times 21 = 1470^f$.

Valeur de la propriété : $12750^f + 1470^f = 14220^f$.

On veut louer cette propriété de manière qu'elle rapporte $5\frac{0}{0}$. On dira donc : 100^f rapporteront 5^f.

1^f rapportera 100 fois moins, ou $\frac{5^f}{100}$.

14220^f rapporteront 14220 fois plus, ou $\frac{5^f \times 14220}{100} = 711^f$.

La propriété doit être louée **711**^{f}.

586. Problème **76.** *Un homme meurt avec 24656^f de dettes, et le produit de son inventaire ne monte qu'à 21574^f. Dans quel rapport faut-il réduire chaque créance?*

Au lieu de 24656^f on ne paiera aux créanciers que 21574^f.

Au lieu de 1^f on ne paiera que $21574^f : 24656 = \frac{7}{8}^f$.

Et au lieu de 100^f on ne paiera que $\frac{7}{8}^f \times 100 = 87\frac{1}{2}^f$.

Chaque créance devra donc être réduite de $\frac{1}{8}$, ou de $12\frac{1}{2}\frac{0}{0}$.

587. Problème **77.** *Le prix des billets simples de première classe, sur les lignes des chemins de fer de l'État belge, est de $0^{\cdot}0756^f$ par kilomètre pour les trains ordinaires. L'augmentation est de $25\frac{0}{0}$ pour les trains express, et le rabais sur les billets d'aller et retour est de $20\frac{0}{0}$. Combien coûte, en première classe, un billet simple et un billet d'aller et retour d'Anvers à Bruxelles, par train ordinaire et par train express, la distance entre ces deux villes étant de 44^{km}?*

Le prix du billet simple de première classe, en train ordinaire, est, par kilomètre, $0^{\cdot}0756^f$, et, pour 44^{km}, $0^{\cdot}0756^f \times 44 = 3^{\cdot}3264^f$, ou, *en arrondissant cette somme au demi-décime supérieur*, **3·35**^{f}.

Le prix du billet simple, en train express, est, par kilomètre, $0^{\cdot}0756^f \times 1^{\cdot}25 = 0^{\cdot}0945^f$, et, pour 44^{km}, $0^{\cdot}0945^f \times 44 = 4^{\cdot}158^f$, ou **4·20**^{f}.

Le prix du billet d'aller et retour, en train ordinaire, est, par kilomètre, $0^{\cdot}0756^f \times 0^{\cdot}80 \times 2 = 0^{\cdot}12096^f$, et, pour 44^{km}, $0^{\cdot}12096^f \times 44 = 5^{\cdot}32224^f$, ou **5·35**^{f}.

Le prix du billet d'aller et retour, en train express, est, par kilomètre, $0^{\cdot}12096^f \times 1^{\cdot}25 = 0^{\cdot}1512^f$, et, pour 44^{km}, $0^{\cdot}1512^f \times 44 = 6^{\cdot}6528^f$, ou **6·70**^{f}.

588. Problème **78.** *Si le lait donne* $12\frac{0}{0}$ *de son poids de crème, et si la crème produit* $30\frac{0}{0}$ *de son poids de beurre, combien* 100 *litres de lait donneront-ils de kilogrammes de beurre? La densité du lait est* 1·03.

Appelant x le nombre de kilogrammes de beurre que l'on peut retirer de 100 litres de lait, on a (**516**) :

x kg. de beurre.	. . .	100 litres de lait;
1 litre de lait	. . . .	1·03 kg. de lait;
100 kg. de lait.	. . . .	12 kg. de crème;
100 kg. de crème.	. . .	30 kg. de beurre;

d'où

$$x = \frac{100 \times 1{\cdot}03 \times 12 \times 30}{100 \times 100} = \mathbf{3{\cdot}708^k}.$$

CHAPITRE XIV

DE L'INTÉRÊT

589. On appelle *intérêt* d'une somme d'argent ou d'un *capital*, le bénéfice dû à celui qui a prêté ou placé cette somme pendant un certain temps.

On appelle *taux l'intérêt que rapportent* 100^f *en un an*, et, plus généralement, *l'intérêt que rapporte une somme fixe*, par exemple, un franc ou cent francs, *en un temps fixe*, par exemple, un an ou un mois ou un jour.

Un capital est placé au taux annuel de $5\frac{0}{0}$, par exemple, lorsque 100^f de capital rapportent 5^f d'intérêt en un an (*).

En Belgique, le taux de l'*intérêt légal* est de $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ en matière civile et de $5\frac{0}{0}$ en matière commerciale.

Le taux de l'intérêt conventionnel est librement fixé par les parties contractantes.

(*) Autrefois, on appelait *denier* le capital qui rapportait 1^f d'intérêt en un an. Un capital était dit placé au denier 20, par exemple, lorsque 20^f de capital rapportaient 1^f d'intérêt en un an.
Le produit du taux par le denier est égal à 100.

Dans les questions d'intérêt et d'escompte, on regarde ordinairement l'année comme composée de 360 jours, ou de 12 mois de 30 jours.

Cependant, quand on calcule le nombre de jours compris entre deux dates, on attribue aux mois le nombre de jours qu'ils ont dans le calendrier grégorien (**442**).

Intérêt simple.

590. L'intérêt est *simple* quand il est payé à la fin de chaque année, ou quand il reste chez l'emprunteur sans porter nouvel intérêt.

L'intérêt simple est proportionnel au capital, ainsi qu'au taux et au temps du placement.

591. Problème **79.** *Un capital de* 4800^f *a été placé à* 5% *le* 4 *mai* 1896. *Quels seront les intérêts de ce capital :* 1° *le* 4 *mai* 1900; 2° *le* 25 *octobre* 1903?

1° Du 4 mai 1896 au 4 mai 1900 il y a 4 ans. On dira donc :

100^f en 1 an rapportent 5^f.

1^f en 1 an rapporte 100 fois moins, ou $\frac{5^f}{100}$.

4800^f en 1 an rapportent 4800 fois plus, ou $\frac{5^f \times 4800}{100}$.

4800^f en 4 ans rapportent 4 fois plus, ou $\frac{5^f \times 4800 \times 4}{100} = \mathbf{960^f}$.

2° Du 4 mai 1896 au 25 octobre 1903 il y a 7 ans 174 jours, ou 2694 jours. On dira donc :

100^f en 360^j rapportent 5^f.

1^f en 360^j rapporte 100 fois moins, ou $\frac{5^f}{100}$.

4800^f en 360^j rapportent 4800 fois plus, ou $\frac{5^f \times 4800}{100}$.

4800^f en 1^j rapportent 360 fois moins, ou $\frac{5^f \times 4800}{100 \times 360}$.

4800^f en 2694^j rapportent 2694 fois plus, ou $\frac{5^f \times 4800 \times 2694}{100 \times 360} = \mathbf{1796^f}$.

592. Les valeurs de l'intérêt, dans le problème qui précède, peuvent s'écrire :

$$\frac{5^f}{100} \times 4800 \times 4, \qquad \frac{5^f}{100} \times 4800 \times \frac{2700}{360}.$$

Sous cette forme, on voit que *l'intérêt est un produit de trois facteurs, qui sont : le centième du taux, le capital et le temps, évalué en années ou en fraction d'année.*

Par suite, ces quatre quantités, le capital, le taux, le temps et l'intérêt, sont tellement liées, que, trois d'entre elles étant connues, on peut toujours déterminer la quatrième (*).

593. Problème **80**. *Quel est le* capital *qui, placé à* $3\frac{1}{2}$ %, *rapporte* 210^f *d'intérêt en* 6 *ans?*

$3\frac{1}{2}^f$ sont rapportés en 1 an par un capital de 100^f.

1^f est rapporté en 1 an par un capital $3\frac{1}{2}$ fois plus petit, ou par $\frac{100^f}{3{\cdot}50}$.

210^f sont rapportés en 1 an par un capital 210 fois plus grand, ou par $\frac{100^f \times 210}{3{\cdot}50}$.

210^f sont rapportés en 6 ans par un capital 6 fois plus petit, ou par $\frac{100^f \times 210}{3{\cdot}50 \times 6} = 1000^f$.

Le capital placé est de **1000**^{f}.

594. Problème **81**. *Rembourser une rente de* 90^f *au taux de* $4\frac{1}{2}$ %.

Il faut chercher le capital qui, au taux de $4\frac{1}{2}$ %, produit la *rente* ou intérêt annuel de 90^f.

$4\frac{1}{2}^f$ de rente sont produits par un capital de 100^f.

1^f de rente est produit par un capital $4\frac{1}{2}$ fois plus petit, ou par $\frac{100^f}{4{\cdot}5}$.

(*) Si l'on appelle a le capital placé, r le taux par franc et par an, n le temps du placement, évalué en années ou en fraction d'année, i l'intérêt rapporté par le capital au bout de ce temps et A le capital augmenté de ses intérêts, on a

$$i = arn, \qquad a = \frac{i}{rn}, \qquad r = \frac{i}{an}, \qquad n = \frac{i}{ar}, \qquad A = a\,(1 + rn).$$

90^f de rente sont produits par un capital 90 fois plus grand, ou par $\frac{100^f \times 90}{4^f5} = \mathbf{2000}^f$.

595. Problème **82.** *A quel* taux *a été placé un capital de* 730^f, *qui a rapporté* 204^f40^f *d'intérêt en* 7 *ans?*

730^f en 7 ans rapportent 204^f40^f.

1^f en 7 ans rapporte 730 fois moins, ou $\frac{204^f40^f}{730}$.

100^f en 7 ans rapportent 100 fois plus, ou $\frac{204^f40^f \times 100}{730}$.

100^f en 1 an rapportent 7 fois moins, ou $\frac{204^f40^f \times 100}{730 \times 7} = 4^f$.

Le capital a été placé au taux de $\mathbf{4}\frac{0}{0}$.

596. Problème **83.** *Pendant combien de* temps *faut-il placer* 5000^f *à* $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ *pour retirer* 1000^f *d'intérêt?*

100^f rapportent $4\frac{1}{2}^f$ en 1 an.

1^f rapporte $4\frac{1}{2}^f$ en 100 fois plus de temps, ou en $1^{an} \times 100$.

5000^f rapportent $4\frac{1}{2}^f$ en 5000 fois moins de temps, ou en $\frac{1^{an} \times 100}{5000}$.

5000^f rapportent 1^f en $4\frac{1}{2}$ fois moins de temps, ou en $\frac{1^{an} \times 100}{5000 \times 4^f5}$.

5000^f rapportent 1000^f en 1000 fois plus de temps, ou en $\frac{1^{an} \times 100 \times 1000}{5000 \times 4^f5} = 4\frac{4}{9}$ ans.

Le capital doit rester placé pendant $4\frac{4}{9}$ ans ou **4** ans **160** jours.

597. Problème **84.** *Au bout de combien de temps un capital placé à* $5\frac{0}{0}$ *est-il doublé?*

Il faut chercher en combien de temps 100^f placés à $5\frac{0}{0}$ rapportent 100^f d'intérêt.

Pour avoir 5^f d'intérêt, il faut 1 an. Pour avoir 100^f d'intérêt, il faut donc autant d'années que 5^f sont contenus de fois dans 100^f, ou $100 : 5 =$ 20 ans. Ainsi un capital placé à $5\frac{0}{0}$ est doublé après **20** ans.

On trouverait, de même, qu'il est triplé après **40** ans, quadruplé après **60** ans, etc.

598. Problème **85.** *Trouver ce que devient, après 12 ans, un capital de 8750f placé à intérêt simple à 5 0/0.*

1f de capital, au taux de 5 0/0, rapporte, en un an, 0'05f, et, en 12 ans, **0'60f**. 1f de capital vaut donc, après 12 ans, **1'60f**, et un capital de 8750f vaut, après le même temps, 1'60f × 8750 = **14000f**.

Ainsi, *pour obtenir la valeur du capital après un temps donné, on multiplie le centième du taux par le temps du placement; on augmente ce produit d'une unité, et on multiplie la somme obtenue par le capital.*

Méthode des nombres et des diviseurs.

599. On appelle *nombre* le produit du centième du capital par le nombre de jours du placement, et *diviseur*, le quotient de 360 par le taux.

On peut aussi prendre pour *nombre* le produit du capital par le nombre de jours du placement, et, pour *diviseur*, le quotient de 36 000 par le taux.

Les diviseurs, correspondant respectivement aux taux

	6 0/0,	5 0/0,	4 1/2 0/0,	4 0/0,	3 0/0,	2 0/0,
sont :	60,	72,	80,	90,	120,	180,
ou	6000,	7200,	8000,	9000,	12 000,	18 000 (*).

L'intérêt est égal au quotient du nombre par le diviseur.

En effet, l'intérêt d'un capital de a francs, placé à t pour cent pendant n jours, est (**591**)

$$\frac{t \times a \times n}{100 \times 360},$$

ce que l'on peut écrire

$$\left(\frac{a}{100} \times n\right) : \frac{360}{t}, \qquad \text{ou} \qquad (a \times n) : \frac{36000}{t}.$$

Lorsque plusieurs sommes ont été placées au même taux pendant des temps différents, *l'intérêt est égal à la somme des nombres divisée par le diviseur.*

(*) Lorsque l'année est comptée de 365 jours, comme en Angleterre, le diviseur correspondant au taux 5 0/0 est 73 ou 73000.

Méthode des parties aliquotes.

***600**. La *méthode des parties aliquotes* (**116, 236** et **478**) est souvent employée avec avantage dans les calculs d'intérêt simple. Elle consiste dans un fractionnement convenable du *capital*, du *taux* ou du *temps* du placement.

1° *On décompose le* capital *en parties multiples ou sous-multiples les unes des autres, la première de ces parties étant dans un rapport simple avec le diviseur fixe.*

PROBLÈME **86.** *Calculer l'intérêt de* 6592^{f} *à* $4\frac{1}{2}$ % *pendant* 85 *jours.*

Intérêt à $4\frac{1}{2}$ % de 6400^{f} pendant 85 jours :	$\frac{64 \times 85}{80}$ ou $\frac{8}{10} \times 85$ . .	68·00^{f}
160	$\frac{1}{40}$ du précédent. . .	1·70
32	$\frac{1}{5}$ du précédent. . .	0·34
Intérêt à $4\frac{1}{2}$ % de 6592^{f} pendant 85 jours		**70·04**

2° *On décompose le* taux *en parties multiples ou sous-multiples les unes des autres, la première de ces parties correspondant à un diviseur fixe très simple.*

En particulier, on peut employer le taux 6%, correspondant au diviseur fixe 60 ou 6000, et déduire $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ du résultat, suivant que le taux donné est $5\frac{1}{4}$%, 5%, $4\frac{1}{2}$%, 4%, 3%, ou, au contraire, ajouter $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ au résultat, si le taux donné est $6\frac{3}{4}$%, 7%, $7\frac{1}{2}$%, 8%, 9%.

PROBLÈME **87.** *Calculer l'intérêt de* 4815^{f} *à* $3\frac{13}{16}$ % *pendant* 128 *jours.*

Intérêt à 6% de 3000^{f} pendant 128 jours :	$\frac{30 \times 128}{60}$ ou $\frac{1}{2} \times 128$.	64·00^{f}
1800	$\frac{6}{10}$ du précédent. . .	38·40
15	$\frac{1}{200}$ du même . . .	0·32
Intérêt à 6% de 4815^{f} pendant 128 jours		102·72
3	$\frac{1}{2}$ du précédent . . .	51·36
$\frac{8}{16}$ ou $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$ du précédent . . .	8·56
$\frac{4}{16}$ ou $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$ du précédent . . .	4·28
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$ du précédent . . .	1·07
Intérêt à $3\frac{13}{16}$ % de 4815^{f} pendant 128 jours		**65·27**

3° *Lorsque le nombre de jours du placement est égal au diviseur, l'intérêt est égal au centième du capital* (**599**). Cela étant, pour calculer l'intérêt simple d'un capital, *on décompose le* nombre de jours *du placement en parties multiples ou sous-multiples du diviseur, ou sous-multiples les unes des autres.*

PROBLÈME **88**. *Calculer le total des intérêts de plusieurs capitaux, se montant ensemble à* 34788·95f, *pour un temps moyen de* 59·86 *jours, au taux de* $4\frac{1}{2}$ %.

Intérêt à $4\frac{1}{2}$ % pour	80 jours :	$\frac{1}{100}$ du capital		347·89f
	40	»	$\frac{1}{2}$ du précédent.	173·94
	10	»	$\frac{1}{4}$ du précédent.	43·49
	1	»	$\frac{1}{10}$ du précédent.	4·35
	9	»	différence des deux précédents	39·14
	0·8	»	$\frac{8}{10}$ de l'avant-précédent . .	3·48
	0·04	»	$\frac{1}{20}$ du précédent.	0·17
	0·02	»	$\frac{1}{2}$ du précédent.	0·09
Intérêt à $4\frac{1}{2}$ % pour 59·86 jours				**260·31**

Caisse d'Épargne sous la garantie de l'État.

601. Une *Caisse d'Épargne* a été établie en Belgique sous la garantie de l'État, par la loi du 16 mars 1865. Les versements sont reçus à la Caisse générale à Bruxelles, dans les agences de la Banque nationale et dans les bureaux de poste. Ils doivent être de 1f au moins, et sans fractions. Ils sont productifs d'intérêt à partir du 1er ou du 16 du mois qui suit le dépôt. Cet intérêt est calculé par mois et demi-mois, au taux de 3 % par an ou $\frac{1}{4}$ % par mois. Toutefois le taux est réduit à 2 % par an ou $\frac{1}{6}$ % par mois sur la totalité des dépôts dont le solde a dépassé 3000f pendant l'année. Les intérêts ne se calculent pas sur les fractions de franc; les fractions de centime ne sont jamais portées en compte. Les intérêts acquis au 31 décembre de chaque année sont ajoutés au capital et deviennent, dès le lendemain, productifs d'intérêt.

Les remboursements ont lieu sans avis préalable pour toute somme n'excé-

dant pas 100f. Le retrait des sommes supérieures à 100f doit être demandé d'avance avant un délai déterminé. Les sommes remboursées cessent d'être productives d'intérêt le 1er ou le 16 du mois qui précède le remboursement.

602. Problème **89**. *Une personne a déposé à la Caisse d'Épargne* 300f *le* 31 *janvier* 1896, 150f *le* 8 *avril et* 250f *le* 22 *juin ; elle a retiré* 100f *le* 17 *juillet et* 75f *le* 24 *août, et a déposé de nouveau* 225f *le* 15 *septembre. Son compte ayant été réglé le* 31 *décembre de la même année, on demande quelle a été alors la somme inscrite sur son livret.*

La somme à inscrire sur son livret au 1er janvier 1897 se compose du total des sommes versées et de leurs intérêts à cette date, moins le total des sommes remboursées et de leurs intérêts à la même date. On trouve que cette somme est égale à $(925^f + 17^{\cdot}14^f) - (175^f + 2^{\cdot}21^f) = \mathbf{764^{\cdot}93^f}$.

Intérêt composé.

603. L'intérêt est *composé* quand il s'ajoute, à la fin de chaque année, au capital, pour former le capital de l'année suivante.

604. Problème **90**. *Trouver à combien s'élève, après* 12 *ans, un capital de* 8750f, *placé à intérêt composé à* 6^0_0.

1f de capital, au taux de 6^0_0, devient, au bout d'un an, $1^{\cdot}06^f$; un capital de 8750f devient donc, après un an, $1^{\cdot}06^f \times 8750$, ou $8750^f \times 1^{\cdot}06$; il devient, après deux ans, $8750^f \times 1^{\cdot}06 \times 1^{\cdot}06$, ou $8750^f \times 1^{\cdot}06^2$; après trois ans, $8750^f \times 1^{\cdot}06^3$; après quatre ans, $8750^f \times 1^{\cdot}06^4$, et ainsi de suite. En désignant par A sa valeur après douze ans, on a donc

$$A = 8750^f \times 1^{\cdot}06^{12}.$$

Ainsi, *pour obtenir le capital définitif, on cherche la valeur d'un franc, au taux donné, au bout d'un an; on élève cette valeur à une puissance de degré égal au nombre d'années du placement, et on multiplie le capital primitif par cette puissance* (*).

(*) Si l'on appelle a le capital placé, r le taux par franc et par an, n le nombre d'années du placement, et A le capital augmenté de ses intérêts composés pendant ce temps, on a

$$A = a(1 + r)^n.$$

Pour ne pas avoir à former, par multiplications successives, la douzième puissance de 1·06, on peut calculer A par logarithmes. On a :

$$\log A = \log 8750 + 12 \log 1{\cdot}06$$

$\log 8750$		3·94201
$12 \log 1{\cdot}06$	$12 \times 0{\cdot}0253059$	0·30367
$\log A$		4·24568

$$A = \mathbf{17606{\cdot}80}^{f}$$

On prend le logarithme de 1·06 avec sept décimales; car le logarithme de 1·06, à cinq décimales, n'étant approché qu'à moins d'un demi-cent-millième, son produit par 12 ne serait approché qu'à moins de 6 cent-millièmes (**413**).

Mais il est préférable de se servir d'une *Table d'intérêts composés* (*), laquelle donne, *à simple lecture*, $1{\cdot}06^{12} = 2{\cdot}0121965$, nombre qu'on multiplie ensuite par 8750, soit par la règle ordinaire, soit par la règle d'Oughtred (**335**), soit par la méthode des parties aliquotes (**116**). On a ainsi

$$A = 8750^{f} \times 2{\cdot}0121965 = \mathbf{17606{\cdot}72}^{f}.$$

605. Problème **91**. *Quelle somme faut-il placer à intérêt composé à* $4\frac{3}{4}\,\frac{0}{0}$ *pour retirer, après* 9 *ans*, 7592^{f}?

En désignant par a le capital à placer, on a (**604**)

$$a^{f} \times 1{\cdot}0475^{9} = 7592^{f}, \quad \text{d'où} \quad a = \frac{7592^{f}}{1{\cdot}0475^{9}}.$$

Pour ne pas avoir à former, par multiplications successives, la neuvième puissance de 1·0475, on peut calculer a par logarithmes. On a :

$$\log a = \log 7592 - 9 \log 1{\cdot}0475$$

$\log 7592$		3·88036
$9 \log 1{\cdot}0475$	$9 \times 0{\cdot}0201540$	0·18139 —
$\log a$		3·69897

$$a = \mathbf{5000}^{f}$$

Mais il est préférable de se servir d'une *Table d'intérêts composés*,

(*) Voir la table VII de mon *Recueil de Tables numériques*, Namur 1881. Cette table comprend 21 taux et s'étend jusqu'à 50 ans.

laquelle donne, *à simple lecture*, $1^{\cdot}0475^{9} = 1^{\cdot}5184$, nombre par lequel on divise 7592. On a ainsi

$$a = 7592 : 1^{\cdot}5184 = \mathbf{5000}^{f}.$$

606. Problème **92**. *A quel taux faut-il placer à intérêt composé une somme de* 1020^{f} *pour retirer, après* 8 *ans,* 1507^{f}?

En désignant par r le taux par franc et par an, on a

$$1020^{f} \times (1 + r)^{8} = 1507^{f}, \quad \text{d'où} \quad (1 + r)^{8} = \frac{1507}{1020} = 1^{\cdot}47745^{f}.$$

Pour ne pas avoir à extraire la racine huitième de $1^{\cdot}47\,745$, on cherche dans une *Table d'intérêts composés*, les valeurs acquises par 1^{f} aux différents taux après 8 ans : on trouve que la valeur $1^{\cdot}47\,745^{f}$ correspond au taux $5\frac{1}{2}$.

On peut aussi calculer r par logarithmes. On a :

$$8 \log(1 + r) = \log 1507 - \log 1020$$

$$\begin{array}{rl}
\log 1507 \ldots & 3^{\cdot}17811 \\
\log 1020 \ldots & 3^{\cdot}00860 - \\
\hline
8 \log(1 + r) \ldots & 0^{\cdot}16951 \\
\hline
\log(1 + r) \ldots & 0^{\cdot}02119 \\
\hline
1 + r \ldots & 1^{\cdot}05 \\
\hline
r = & \mathbf{0^{\cdot}05}^{f}
\end{array}$$

607. Problème **93**. *Pendant combien de temps faut-il placer* 2035^{f} *intérêt composé à* $3\frac{1}{2}$ *pour avoir un capital définitif de* 2440^{f}?

1^{f}, au taux de $3\frac{1}{2}$, vaut, au bout du temps cherché, $2440^{f} : 2035 = 1^{\cdot}19902^{f}$. Or, en formant les puissances successives de $1^{\cdot}035$, ou, mieux en consultant une *Table d'intérêts composés*, on trouve $1^{\cdot}035^{5} = 1^{\cdot}18769$, c'est-à-dire que 1^{f}, au taux de $3\frac{1}{2}$, vaut, après **5** ans, $1^{\cdot}18769^{f}$.

Il reste à chercher en combien de jours $1^{\cdot}18769^{f}$ produisent $1^{\cdot}19902^{f} - 1^{\cdot}18769^{f} = 0^{\cdot}01133^{f}$. Or, 1^{f} produisant $0^{\cdot}035^{f}$ d'intérêt en 365 jours, $1^{\cdot}18769^{f}$ produisent $0^{\cdot}01133^{f}$ d'intérêt en

$$\frac{365^{j} \times 0^{\cdot}01133}{1^{\cdot}18769 \times 0^{\cdot}035} = \mathbf{100} \text{ jours.}$$

Le temps cherché est donc **5** ans **100** jours.

On peut dire encore :

Le temps cherché est un nombre exact d'années, que nous désignerons r n, ou un nombre entier n d'années, plus une fraction. On a donc :

$$2035^{f} \times 1{\cdot}035^{n} \leqq 2440^{f},$$

où

$$1{\cdot}035^{n} \leqq \frac{2440}{2035},$$

, en prenant les logarithmes,

$$n \log 1{\cdot}035 \leqq \log 2440 - \log 2035,$$

où

$$n \leqq \frac{\log 2440 - \log 2035}{\log 1{\cdot}035} = \frac{3{\cdot}38739 - 3{\cdot}30856}{0{\cdot}01494} = \frac{0{\cdot}07883}{0{\cdot}01494}.$$

visant 0·07883 par 0·01494, on trouve pour quotient entier 5 et pour ste 0·00413. Il s'ensuit que le temps cherché se compose de **5** années, ns une fraction d'année.

Or je dis que *le reste* 0·00413 *de la division est précisément le garithme de la valeur de* 1f, *au taux de* $3\frac{1}{2}\,\frac{0}{0}$, *au bout de cette fraction 'année.* En effet, en appelant x cette valeur, on a

$$2035^{f} \times 1{\cdot}035^{5} \times x = 2440^{f},$$

où

$$\log x = \log 2440 - \log 2035 - 5 \log 1{\cdot}035. \qquad (1)$$

ais, le quotient entier de $\log 2440 - \log 2035$ par $\log 1{\cdot}035$ étant 5 et reste 0·00413, on a aussi

$$\log 2440 - \log 2035 = 5 \log 1{\cdot}035 + 0{\cdot}00413,$$

où

$$0{\cdot}00413 = \log 2440 - \log 2035 - 5 \log 1{\cdot}035. \qquad (2)$$

a comparaison des égalités (1) et (2) fait voir que l'on a

$$\log x = 0{\cdot}00413,$$

e qu'il fallait démontrer.

On tire de là, en remontant du logarithme au nombre,

$$x = 1{\cdot}0096,$$

c'est-à-dire que 1^f rapporte, au bout de la fraction inconnue d'année, $0{\cdot}0096^f$. Or, 1^f rapportant $0{\cdot}035^f$ en 365 jours, 1^f rapporte $0{\cdot}0096^f$ en

$$\frac{365^j \times 0{\cdot}0096}{0{\cdot}035} = \mathbf{100} \text{ jours.}$$

Le temps cherché est donc **5** ans **100** jours.

*Dans les deux solutions qui précèdent, on suppose le capital placé à intérêt composé pendant le nombre entier d'années contenu dans le temps cherché, puis le capital obtenu après ce nombre d'années placé à intérêt simple pendant le nombre complémentaire de jours. La solution est plus simple, si l'on admet les *exposants fractionnaires*, et si l'on convient que *l'intérêt se compose de jour en jour, de manière à s'élever, à la fin de l'année, au taux donné* (*).

On a alors, en désignant par n le temps cherché, évalué en années ou en fraction d'année,

$$2035^f \times 1{\cdot}035^n = 2440^f,$$

d'où

$$n = \frac{\log 2440 - \log 2035}{\log 1{\cdot}035} = \frac{3{\cdot}38739 - 3{\cdot}30856}{0{\cdot}01494} = \frac{0{\cdot}07883}{0{\cdot}01494}$$

$$= \mathbf{5} \text{ ans } \mathbf{101} \text{ jours.}$$

608. Problème **94.** *Au bout de combien de temps un capital placé à intérêt composé à $5\frac{0}{0}$ est-il doublé?*

Il faut chercher après combien de temps 1^f, au taux de $5\frac{0}{0}$, vaut 2^f.

Or, en opérant comme dans le problème précédent, on trouve d'abord, dans la *Table d'intérêts composés*, que 1^f, au taux de $5\frac{0}{0}$, vaut, après **14** ans, $1{\cdot}9799^f$. On trouve ensuite que $1{\cdot}9799^f$ rapportent $0{\cdot}0201^f$ d'intérêt en **74** jours. Donc le temps cherché est **14** ans **74** jours.

*On peut dire encore :

Appelons n le nombre entier d'années contenu dans le temps cherché. On aura

$$1{\cdot}05^n \leqq 2,$$

(*) Voir, pour cette double convention, les traités d'Algèbre.

d'où

$$n \leqq \frac{\log 2}{\log 1{\cdot}05} = \frac{0{\cdot}30103}{0{\cdot}02119}.$$

Divisant 0·30103 par 0·02119, on trouve pour quotient entier 14 et pour reste 0·00437.

On conclut de là, comme dans le problème précédent, que $n = \mathbf{14}$. De plus, en appelant x la valeur de 1^f, au taux de $5\frac{0}{0}$, au bout de la fraction complémentaire d'année, on a

$$\log x = 0{\cdot}00437, \qquad \text{d'où} \qquad x = 1{\cdot}0101.$$

Cette fraction d'année, évaluée en jours, est donc

$$\frac{365^j \times 0{\cdot}0101}{0{\cdot}05} = \mathbf{74} \text{ jours.}$$

*En adoptant la double convention dont il a été question ci-dessus, on aurait simplement

$$1{\cdot}05^n = 2,$$

d'où

$$n = \frac{\log 2}{\log 1{\cdot}05} = \frac{0{\cdot}30103}{0{\cdot}02119} = \mathbf{14} \text{ ans } \mathbf{75} \text{ jours.}$$

CHAPITRE XV

DE L'ESCOMPTE

609. Dans la banque et le commerce, on nomme *billet* ou *effet* tout titre écrit portant indication d'une somme à payer à jour fixe.

On nomme *escompte* la déduction que l'on fait sur un billet payé avant l'*échéance*.

La somme marquée sur le billet s'appelle *valeur nominale* ou *montant* du billet. Cette même somme, diminuée de l'escompte, est la *valeur actuelle* du billet.

On appelle *échéance moyenne* celle d'un billet unique, égal à la somme de plusieurs billets à échéances diverses (**619, 628** et **631**).

On appelle *échéance commune* celle à laquelle on convient de rapporter le règlement de plusieurs billets à échéances diverses (**618** et **627**).

L'échéance commune peut être antérieure aux échéances de tous les billets, ou leur être postérieure, ou être comprise entre l'échéance la plus rapprochée et l'échéance la plus éloignée.

On distingue deux sortes d'escompte : l'*escompte en dehors* ou *commercial* et l'*escompte en dedans*.

Escompte en dehors.

610. L'*escompte en dehors* est une *déduction faite à tant pour cent par an ou par mois ou par jour sur la valeur nominale d'un billet* (*).

Si, par exemple, le taux de l'escompte est $5\frac{0}{0}$, sur 100^f payables dans un an on déduit 5^f; sur 100^f payables dans deux ans on déduit 10^f, et ainsi de suite. En d'autres termes, au lieu de payer 100^f dans un an, on paie aujourd'hui $100^f - 5^f$ ou 95^f; au lieu de payer 100^f dans deux ans, on paie aujourd'hui $100^f - 10^f$ ou 90^f, et ainsi de suite.

L'escompte en dehors est proportionnel au montant du billet, au temps dont on devance l'époque de l'échéance et au taux de l'escompte (**).

611. Problème **95**. *Escompter en dehors, à la date du* 25 *mars et au taux de* $4\frac{0}{0}$, *un billet de* 5030^f, *qui n'échoit que le* 18 *mai suivant.*

Du 25 mars au 18 mai il y a $6 + 30 + 18$ ou 54 jours.

Puisque l'escompte en dehors se calcule sur la valeur nominale du billet, on dira :

Sur 100^f payables dans 360^j on déduit 4^f.

Sur 1^f payable dans 360^j on déduit 100 fois moins, ou $\frac{4^f}{100}$.

Sur 5030^f payables dans 360^j on déduit 5030 fois plus, ou $\frac{4^f \times 5030}{100}$.

(*) L'*escompte en dehors* est ainsi appelé, parce qu'il est calculé sur une valeur *en dehors* de la valeur actuelle, c'est-à-dire plus grande que cette dernière.

(**) Par convention, on regarde l'escompte en dehors comme étant l'*intérêt* de la valeur nominale du billet, depuis le jour du paiement jusqu'à celui de l'échéance.

Sur 5030^f payables dans 1^j on déduit 360 fois moins, ou $\frac{4^f \times 5030}{100 \times 360}$.

Et sur 5030^f payables dans 54^j on déduit 54 fois plus, ou $\frac{4^f \times 5030 \times 54}{100 \times 360} = \mathbf{30{\cdot}18^f}$.

La déduction à faire sur le billet étant de $30{\cdot}18^f$, le *porteur* ne recevra que $5030^f - 30{\cdot}18^f = \mathbf{4999{\cdot}82^f}$.

Plus brièvement :

1^f, payable dans 54^j, vaut, actuellement, le taux de l'escompte étant $4\frac{0}{0}$,

$$1^f - \frac{4^f \times 54}{100 \times 360} = 1^f - 0{\cdot}006^f = 0{\cdot}994^f.$$

Par suite, 5030^f, payables dans 54^j, valent, actuellement, 5030 fois $0{\cdot}994^f$, ou $0{\cdot}994^f \times 5030 = \mathbf{4999{\cdot}82^f}$ (*).

612. Problème **96.** *On présente à l'escompte, le 20 août 1896, les quatre billets suivants : 4500^f payables au 25 août; 3450^f payables au 5 septembre; 2640^f payables au 20 octobre; 5480^f payables au 15 novembre. Combien recevra-t-on du banquier, le taux de l'escompte en dehors étant $5\frac{0}{0}$?*

On cherchera la somme des escomptes de 4500^f pour 5 jours, de 3450^f pour 16 jours, de 2640^f pour 61 jours et de 5480^f pour 87 jours, ou, ce qui revient au même, l'escompte, pour un seul jour, d'une somme égale à

$$4500^f.5 + 3450^f.16 + 2640^f.61 + 5480^f.87 = 715500^f.$$

Le taux étant $5\frac{0}{0}$, cet escompte est $\frac{5^f \times 715500}{100 \times 360} = \mathbf{99{\cdot}375^f}$.

La somme des montants des cinq billets est d'ailleurs égale à 16070^f.

Par suite, on recevra du banquier $16070^f - 99{\cdot}375^f = \mathbf{15970{\cdot}625^f}$.

(*) Si l'on appelle A la valeur nominale du billet, a sa valeur actuelle, r le taux par franc et par an de l'escompte en dehors, n le temps à courir jusqu'au jour de l'échéance, e l'escompte, on a

$$e = A - a = Arn, \quad a = A(1 - rn), \quad A = \frac{a}{1 - rn}, \quad n = \frac{e}{Ar}, \quad r = \frac{e}{An}.$$

*On peut employer, pour résoudre cette question, la *méthode des nombres et des diviseurs* (**599**), et dresser le *bordereau* suivant :

Bordereau des effets présentés à l'escompte, le 20 août 1896, par M. X...

ÉCHÉANCES	VALEURS	JOURS	NOMBRES	
25 août 1896	4500f	5	22500	
5 septembre	3450	16	55200	
20 octobre	2640	61	161040	
15 novembre	5480	87	476760	
	16070		715500	7200
Escompte à 5 %. .	99'375			99'375
Net	**15970'625**			

***613.** Problème **97**. *Trouver la somme des escomptes, à* 4 % *l'an, ou à* $\frac{1}{9000}$ *par jour, exigibles par la Banque de France, le* 29 *octobre* 1839, *pour l'escomptage de 8976 effets, au capital de* 13987490f, *recouvrable en 91 échéances successives, savoir :* 135343f *dans* 3 *jours,* 14560f *dans* 4 *jours,* 14181f *dans* 5 *jours, etc.* (*)

Pour ne pas avoir à faire les 91 produits des capitaux par les nombres de jours d'échéance, puis la somme de ces 91 produits, on procède de la manière suivante, laquelle, outre les 486 chiffres des multiplicandes, n'exige que 345 chiffres au lieu de 1711 :

On écrit, sur une ligne horizontale, les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pour représenter les unités des nombres de jours d'échéance, et, dans une colonne verticale, les mêmes chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, pour représenter

(*) Thoyer, *Les calculs d'intérêts réduits à l'addition*, méthode approuvée par l'Académie des sciences, sur le rapport de M. A. Cauchy, et adoptée par la Banque de France, Paris 1841.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0	»	»	»	135 343	14 560	14 181	110 119	9 709	31 101	82 429	
1	61 480	198 714	112 869	105 502	22 696	44 660	226 372	22 310	38 107	48 674	
2	17 076	183 455	37 249	72 911	49 235	137 269	95 541	48 768	36 916	31 641	
3	28 702	572 783	58 504	12 773	24 613	15 560	111 558	9 006	120 511	22 973	
4	16 497	165 875	35 225	36 868	19 387	63 324	399 336	55 020	54 387	55 489	
5	25 331	221 418	79 351	33 044	76 622	37 350	163 859	56 999	183 992	35 593	
6	3 691	122 881	1 047 102	140 240	63 289	81 530	52 306	383 563	61 634	49 691	
7	106 315	23 726	597 980	35 864	67 058	12 884	16 800	935 900	111 258	88 766	
8	75 308	14 830	690 577	96 115	307 897	107 702	55 215	884 344	35 508	130 952	
9	146 877	55 525	135 977	2 467 348	»	»	»	»	»	»	
V	481 277	1 559 207	2 794 834	3 136 008	645 357	514 460	1 231 106	2 405 619	673 414	546 208	13 987 490
H	3 974 420	8 813 840	7 100 610	9 769 830	9 014 080	9 135 590	20 059 270	19 965 510	23 984 480	28 057 270	139 874 900
	4 455 697	10 373 047	9 895 444	12 905 838	9 659 437	9 650 050	21 290 376	22 371 129	24 657 894	28 603 478	
	0	10 373 047	19 790 888	38 717 514	38 637 748	48 250 250	127 742 256	156 597 903	197 263 152	257 431 302	894 804 060
											99 422'67

les dizaines des mêmes nombres. Cela fait, le capital 55020f, par exemple, payable dans 47 jours, s'écrit à l'intersection de la ligne horizontale marquée 4 avec la colonne verticale marquée 7. Tous les capitaux ayant été inscrits à leur place, on écrit, dans la ligne horizontale marquée V, les sommes des capitaux de chaque colonne verticale, puis, en dessous, dans la ligne horizontale marquée H, respectivement les produits par 10 des sommes des capitaux de chaque ligne horizontale. On ajoute chaque nombre V au nombre H écrit en dessous, et on multiplie les sommes obtenues respectivement par 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 : *le total* 894804060 *de ces produits est la somme des produits de chaque capital par le nombre de jours de son échéance.*

Je dis, par exemple, que ce total renferme le produit du capital 55020f par 47 jours. En effet, le capital 55020f fait partie de la somme verticale 2405619, qui est multipliée par 7, et de la somme horizontale 901408, qui est multipliée successivement par 10 et par 4.

Cela étant, la somme cherchée des escomptes est égale au neuf-millième de 894804060, ou à **99422·67f**.

Il est essentiel de vérifier que la somme des nombres V est égale au capital total 13987490f, et la somme des nombres H, à dix fois ce capital.

614. Problème **98.** *Un billet, payable dans* 3 *mois, vaut* 1588f *comptant, le taux de l'escompte en dehors étant* 3 %. *Trouver le montant du billet.*

Puisque l'escompte en dehors se calcule sur la valeur nominale du billet, on dira :

Sur 100f, payables dans 12 mois, on déduit 3f.

Sur 1f, payable dans 12 mois, on déduit 100 fois moins, ou $\frac{3^f}{100}$.

Sur 1f, payable dans 1 mois, on déduit 12 fois moins, ou $\frac{3^f}{100 \times 12}$.

Sur 1f, payable dans 3 mois, on déduit 3 fois plus, ou $\frac{3^f \times 3}{100 \times 12} = 0{\cdot}0075^f$.

1f de valeur nominale a donc une valeur actuelle de $1^f - 0{\cdot}0075^f = 0{\cdot}9925^f$.

Puisque 0·9925f de valeur actuelle correspondent à 1f de valeur nominale, 1588f de valeur actuelle correspondent à autant de francs de valeur nominale que 0·9925f sont contenus de fois dans 1588f, ou 1588 : 0·9925 = 16[illegible]f.

615. Problème **99.** *Un billet de* 4825^f, *payable à* 8 *mois, a été payé* 4632^f *comptant. Quel a été le taux de l'escompte en dehors?*

L'escompte a été de $4825^f - 4632^f = 193^f$.

Puisque l'escompte en dehors se calcule sur la valeur nominale du billet, on dira :

Sur 4825^f de valeur nominale, pour 8 mois, on déduit 193^f.

Sur 1^f, pour 8 mois, on déduit 4825 fois moins, ou $\frac{193^f}{4825}$.

Sur 100^f, pour 8 mois, on déduit 100 fois plus, ou $\frac{193^f \times 100}{4825}$.

Sur 100^f, pour 1 mois, on déduit 8 fois moins, ou $\frac{193^f \times 100}{4825 \times 8}$.

Sur 100^f, pour 12 mois ou 1 an, on déduit 12 fois plus, ou $\frac{193^f \times 100 \times 12}{4825 \times 8} = 6^f$.

Le taux de l'escompte en dehors a été de **6** $\frac{0}{0}$.

616. Problème **100.** *Un billet de* 1750^f *a une valeur actuelle de* 1680^f, *le taux de l'escompte en dehors étant* $5\frac{0}{0}$. *Trouver l'époque de l'échéance.*

L'escompte est de $1750^f - 1680^f = 70^f$.

Puisque l'escompte en dehors se calcule sur la valeur nominale du billet, on dira :

100^f de valeur nominale donnent 5^f d'escompte en 12 mois.

1^f de valeur nominale donne 5^f d'escompte en 100 fois plus de temps, ou en $12^{mois} \times 100$.

1750^f de valeur nominale donnent 5^f d'escompte en 1750 fois moins de temps, ou en $\frac{12^{mois} \times 100}{1750}$.

1750^f de valeur nominale donnent 1^f d'escompte en 5 fois moins de temps, ou en $\frac{12^{mois} \times 100}{1750 \times 5}$.

1750^f de valeur nominale donnent 70^f d'escompte en 70 fois plus de temps, ou en $\frac{12^{mois} \times 100 \times 70}{1750 \times 5} = 9{\cdot}6$ mois.

Le billet est payable dans **9** mois **18** jours.

617. Problème **101.** *On propose de remplacer un billet de 4950f, payable au 1er mars, par un autre payable au 1er juin. Quel sera le montant du nouveau billet, si l'escompte est en dehors, au taux de 4 0/0?*

De même qu'un billet, *payé avant son échéance*, est *diminué* de l'escompte ou intérêt de sa valeur nominale, pour le temps dont on devance l'échéance, de même un billet, *payé après son échéance*, est *augmenté* de l'escompte ou intérêt de sa valeur nominale, pour le temps dont on retarde l'échéance.

Le nouveau billet sera donc de 4950f, plus l'intérêt de cette somme à 4 0/0 pendant 3 mois, ou de

$$4950^f \times \left(1 + \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{12}\right) = 4950^f \times 1{\cdot}01 = \mathbf{4999{\cdot}50^f} \text{ (*)}.$$

618. Problème **102.** *Remplacer par un billet unique, payable au 1er juin, trois effets, le premier de 6800f, payable au 15 avril, le deuxième de 8040f, payable au 15 juillet, le troisième de 5252f, payable au 1er septembre. Le taux de l'escompte en dehors est de 4 0/0.*

Le premier billet doit être *augmenté* de son intérêt ou escompte à 4 0/0 pour $1\frac{1}{2}$ mois, ou de $\frac{5}{1000}$: il vaut donc, au 1er juin, $6800^f + 3{\cdot}40^f = 6803{\cdot}40^f$.

Le deuxième billet doit être *diminué* de son intérêt ou escompte à 4 0/0 pour $1\frac{1}{2}$ mois, ou de $\frac{5}{1000}$: il vaut donc, au 1er juin, $8040^f - 40{\cdot}20^f = 7999{\cdot}80^f$.

Le troisième billet doit être *diminué* de son intérêt ou escompte à 4 0/0 pour 3 mois, ou de $\frac{1}{100}$: il vaut donc, au 1er juin, $5252^f - 52{\cdot}52^f = 5199{\cdot}48^f$.

Le billet unique, payable au 1er juin, sera de $6803{\cdot}40^f + 7999{\cdot}80^f + 5199{\cdot}48^f = \mathbf{20002{\cdot}68^f}$.

(*) On résout quelquefois le problème qui précède d'après le principe suivant : ***La valeur nominale du nouveau billet doit être telle que sa valeur actuelle,*** c'est-à-dire 3 mois avant l'échéance, ***soit égale à*** 4950f. On trouve alors, en raisonnant comme au problème **98**, que cette valeur nominale est

$$4950 : \left(1 - \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{12}\right) = 4950 : 0{\cdot}99 = \mathbf{5000^f}.$$

Mais, ***quand il s'agit de l'escompte en dehors,*** nous croyons que la question doit être résolue d'après le principe que nous indiquons dans le texte, et qui revient à admettre, ***comme on l'admet en effet dans le problème de l'échéance moyenne,*** que les formules de l'escompte en dehors subsistent pour n négatif.

619. Problème **103.** *Trouver, l'escompte étant en dehors, l'échéance moyenne de trois billets, le premier de* 4343f, *payable dans* 2 *mois, le deuxième de* 2754f, *payable dans* 4 *mois, le troisième de* 11440f, *payable dans* 8 *mois.*

Le montant du billet unique est de 4343f + 2754f + 11440f = 18537f, et *son échéance doit être telle qu'en le payant actuellement, on ait le même escompte qu'en payant actuellement les trois billets.*

Or l'escompte en dehors de 4343f pour 2 mois est le même que celui de 2 fois 4343f ou de 8686f pour 1 mois.

L'escompte de 2754f pour 4 mois est le même que celui de 4 fois 2754f ou de 11016f pour 1 mois.

L'escompte de 11440f pour 8 mois est le même que celui de 8 fois 11440f ou de 91520f pour 1 mois.

Sur le paiement actuel des trois billets, on aurait donc un escompte égal à l'escompte, pour 1 mois, de 8686f + 11016f + 91520f = 111222f.

Or on doit avoir un escompte égal sur le paiement actuel d'un billet unique de 18537f : donc ce billet doit être payable dans autant d'années que 18537f sont contenus de fois dans 111222f, ou 111222 : 18537 = **6** mois.

On voit qu'*on obtient l'échéance moyenne en multipliant la valeur nominale de chaque billet par le temps de son crédit, et en divisant la somme des produits par la somme des valeurs nominales des billets* (*).

620. Problème **104.** *Quelqu'un emprunte une somme de* 7955f, *pour le remboursement de laquelle il souscrit deux billets égaux, payables le premier dans* 1 *an, le second dans* 2 *ans. Trouver le montant de chaque billet, l'escompte en dehors étant de* 5%.

(*) Soient A, A′, A″,... les valeurs nominales de divers billets, payables respectivement dans n, n', n'',... unités de temps. Si l'escompte est en dehors, l'échéance moyenne x d'un billet unique, égal à la somme des billets proposés, est donnée par la formule

$$x = \frac{An + A'n' + A''n'' + \ldots}{A + A' + A'' + \ldots}.$$

On voit que, dans l'*escompte en dehors*, l'échéance moyenne est indépendante du taux de l'escompte, ainsi que de la date à laquelle on rapporte les valeurs des divers billets.

On simplifiera donc, dans la pratique, la recherche de l'échéance moyenne, en rapportant les dates des échéances des divers billets à la date de l'échéance du billet qui devrait être payé le premier.

L'escompte étant en dehors, 1^f de la somme empruntée équivaut à $1'05^f$ payable dans 1 an ou à $1'10^f$ payable dans 2 ans (**617**) : 1^f du premier billet vaut donc, actuellement, $1 : 1'05 = \frac{20}{21}^f$, et 1^f du second billet vaut $1^f : 1'10 = \frac{10}{11}^f$.

Par suite, si les deux billets étaient de 1^f chacun, ils vaudraient ensemble, actuellement, $\frac{20}{21} + \frac{10}{11} = \frac{430}{231}^f$.

Comme ils valent ensemble, actuellement, 7955^f, chaque billet est donc d'autant de francs que $\frac{430}{231}^f$ sont contenus de fois dans 7955^f, ou $7955 : \frac{430}{231} = \mathbf{4273'50^f}$.

Escompte en dedans.

621. L'escompte est *en dedans* lorsque la valeur actuelle du billet, augmentée de ses intérêts jusqu'à l'échéance, égale la valeur nominale ou le montant du billet.

L'*escompte en dedans* est donc *l'intérêt de la valeur actuelle du billet, depuis le jour du paiement jusqu'à celui de l'échéance* (*).

Si, par exemple, le taux de l'escompte est $5\frac{0}{0}$, on paie aujourd'hui 100^f au lieu de payer $100^f + 5^f$ ou 105^f dans un an, ou au lieu de payer $100^f + 10^f$ ou 110^f dans deux ans, et ainsi de suite. En d'autres termes, sur 105^f payables dans un an, on déduit 5^f; sur 110^f payables dans deux ans, on déduit 10^f, et ainsi de suite.

622. Problème **105.** *Escompter en dedans, à la date du 25 mars et au taux de $4\frac{0}{0}$, un billet de 5030^f, qui n'échoit que le 18 mai suivant.*

Du 25 mars au 18 mai il y a $6 + 30 + 18$ ou 54 jours.

Puisque l'escompte en dedans est l'intérêt de la valeur actuelle du billet, on dira :

100^f en 360^j rapportent 4^f.

1^f en 360^j rapporte 100 fois moins, ou $\frac{4^f}{100}$.

1^f en 1^j rapporte 360 fois moins, ou $\frac{4^f}{100 \times 360}$.

(*) L'*escompte en dedans* est ainsi appelé, parce qu'il est calculé sur une valeur *en dedans* de la valeur nominale, c'est-à-dire plus petite que cette dernière.

1^f en 54^j rapporte 54 fois plus, ou $\frac{4^f \times 54}{100 \times 360} = 0{\cdot}006^f$.

Sur $1^f + 0{\cdot}006^f$ ou $1{\cdot}006^f$ payable au 18 mai, on déduit donc, au 25 mars, $0{\cdot}006^f$.

Sur 1^f on déduit 1·006 fois moins, ou $\frac{0{\cdot}006^f}{1{\cdot}006}$.

Et sur 5030^f on déduit 5030 fois plus, ou $\frac{0{\cdot}006^f \times 5030}{1{\cdot}006} = \mathbf{30^f}$.

La déduction à faire sur le billet étant de 30^f, le *porteur* ne recevra que $5030^f - 30^f = \mathbf{5000^f}$.

Plus brièvement :

1^f, au taux de $4\frac{0}{0}$, vaut, après 54^j, $1^f + \frac{4^f \times 54}{100 \times 360} = 1{\cdot}006^f$.

Ainsi $1{\cdot}006^f$ de valeur nominale du billet correspond à 1^f de valeur actuelle; par suite, 5030^f de valeur nominale correspondent à autant de francs de valeur actuelle que $1{\cdot}006^f$ est contenu de fois dans 5030^f, ou à $5030 : 1{\cdot}006 = \mathbf{5000^f}$.

On voit qu'*on obtient la valeur actuelle d'un billet en divisant sa valeur nominale par la valeur d'un franc à l'échéance* (*).

623. Problème **106.** *Un billet, payable dans* 3 *mois, vaut* 1588^f *comptant, le taux de l'escompte en dedans étant* $3\frac{0}{0}$. *Trouver le montant du billet.*

Puisque l'escompte en dedans est l'intérêt de la valeur actuelle du billet, on dira :

100^f en 12 mois rapportent 3^f.

1^f en 12 mois rapporte 100 fois moins, ou $\frac{3^f}{100}$.

1^f en 1 mois rapporte 12 fois moins, ou $\frac{3^f}{100 \times 12}$.

1^f en 3 mois rapporte 3 fois plus, ou $\frac{3^f \times 3}{100 \times 12} = 0{\cdot}0075^f$.

(*) Si l'on appelle A la valeur nominale du billet, a sa valeur actuelle, r le taux par franc et par an de l'escompte en dedans, n le temps à courir jusqu'au jour de l'échéance, e l'escompte, on a

$$e = A - a = arn, \quad a = \frac{A}{1 + rn}, \quad A = a\,(1 + rn), \quad n = \frac{e}{ar}, \quad r = \frac{e}{an}.$$

1^f de valeur actuelle correspond donc à une valeur nominale de $1^f + 0'0075^f = 1'0075^f$.

Et 1588^f de valeur actuelle correspondent à une valeur nominale 1588 fois plus grande, ou à $1'0075^f \times 1588 =$ **1599'91**^{f}.

624. Problème **107.** *Un billet de* 4825^f, *payable à* 8 *mois, a été payé* 4632^f *comptant. Quel a été le taux de l'escompte en dedans?*

L'escompte a été de $4825^f - 4632^f = 193^f$.

Puisque l'escompte en dedans est l'intérêt de la valeur actuelle du billet, on dira :

4632 en 8 mois rapportent 193^f.

1^f en 8 mois rapporte 4632 fois moins, ou $\frac{193^f}{4632}$.

100^f en 8 mois rapportent 100 fois plus, ou $\frac{193^f \times 100}{4632}$.

100^f en 1 mois rapportent 8 fois moins, ou $\frac{193^f \times 100}{4632 \times 8}$.

100^f en 12 mois ou 1 an rapportent 12 fois plus, ou $\frac{193^f \times 100 \times 12}{4632 \times 8} = 6\frac{1}{4}^f$.

Le taux de l'escompte en dedans a été de $6\frac{1}{4}\%$.

625. Problème **108.** *Un billet de* 1750^f *a une valeur actuelle de* 1680^f, *le taux de l'escompte en dedans étant* 5%. *Trouver l'époque de l'échéance.*

L'escompte est de $1750^f - 1680^f = 70^f$.

Puisque l'escompte en dedans est l'intérêt de la valeur actuelle du billet, on dira :

100^f de valeur actuelle rapportent 5^f en 12 mois.

1^f de valeur actuelle rapporte 5^f en 100 fois plus de temps, ou en $12^{mois} \times 100$.

1680^f de valeur actuelle rapportent 5^f en 1680 fois moins de temps, ou en $\frac{12^{mois} \times 100}{1680}$.

1680^f de valeur actuelle rapportent 1^f en 5 fois moins de temps, ou en $\frac{12^{mois} \times 100}{1680 \times 5}$.

1680^f de valeur actuelle rapportent 70^f en 70 fois plus de temps, ou en $\frac{12^{mois} \times 100 \times 70}{1680 \times 5} = 10$ mois.

Le billet est payable dans **10** mois.

626. Problème **109.** *On propose de remplacer un billet de* 4950^f, *payable au* 1er *mars, par un autre payable au* 1er *juin. Quel sera le montant du nouveau billet, si l'escompte est en dedans, au taux de* $4\frac{0}{0}$?

Il s'agit de *trouver quelle doit être la valeur nominale d'un billet, payable au* 1er *juin, pour que sa valeur au* 1er *mars*, c'est-à-dire 3 mois avant l'échéance, *soit égale à* 4950^f.

On trouve, en raisonnant comme dans le problème **106**, que cette valeur nominale est égale à la valeur actuelle, plus l'intérêt de cette valeur actuelle, ou à

$$4950^f \times \left(1 + \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{12}\right) = 4950^f \times 1{\cdot}01 = \mathbf{4999{\cdot}50}^f \text{ (*)}.$$

627. Problème **110.** *Remplacer par un billet unique, payable au* 1er *juin, trois effets, le premier de* 6800^f, *payable au* 15 *avril, le deuxième de* 8040^f, *payable au* 15 *juillet, le troisième de* 5252^f, *payable au* 1er *septembre. Le taux de l'escompte en dedans est de* $4\frac{0}{0}$.

Le paiement du premier billet est *retardé* de $1\frac{1}{2}$ mois. L'intérêt de 1^f à $4\frac{0}{0}$ pour $1\frac{1}{2}$ mois étant $0{\cdot}005^f$, le premier billet vaut, au 1er juin, $6800^f \times 1{\cdot}005 = 6803{\cdot}40^f$.

Le paiement du deuxième billet est *avancé* de $1\frac{1}{2}$ mois. L'intérêt de 1^f à $4\frac{0}{0}$ pour $1\frac{1}{2}$ mois étant $0{\cdot}005^f$, le deuxième billet vaut, au 1er juin, $8040^f : 1{\cdot}005 = 8000^f$.

Le paiement du troisième billet est *avancé* de 3 mois. L'intérêt de 1^f à $4\frac{0}{0}$ pour 3 mois étant $0{\cdot}01^f$, le troisième billet vaut, au 1er juin, $5252^f : 1{\cdot}01 = 5200^f$.

Le billet unique, payable au 1er juin, sera de $6803{\cdot}40^f + 8000^f + 5200^f = \mathbf{20003{\cdot}40}^f$.

(*) On voit que la valeur nominale du billet est la même dans l'escompte en dedans (**626**) et dans l'escompte en dehors (**617**), quoique les solutions, dans l'un et l'autre escompte, partent de principes différents.

628. Problème **111**. *Trouver l'échéance moyenne de trois billets, le premier de* 4343^f, *payable dans* 2 *mois, le deuxième de* 2754^f, *payable dans* 4 *mois, le troisième de* 11 440^f, *payable dans* 8 *mois, le taux de l'escompte en dedans étant* 6$\frac{0}{0}$.

Le montant du billet unique est de 4343^f + 2754^f + 11 440^f = 18 537^f, et on admet que *son échéance doit être telle que sa valeur actuelle égale la somme des valeurs actuelles des trois billets,* ou (**622**)

$$\frac{4343^f}{1{\cdot}01} + \frac{2754^f}{1{\cdot}02} + \frac{11\,440^f}{1{\cdot}04} = 4300^f + 2700^f + 11\,000^f = \mathbf{18000}^f.$$

On est donc ramené au problème suivant :

Un billet de 18 537^f *a une valeur actuelle de* 18 000^f, *le taux de l'escompte en dedans étant* 6$\frac{0}{0}$. *Quelle est l'époque de l'écheance?*

On trouve (**625**) que le billet est payable dans $\frac{12^{\text{mois}} \times 100 \times 537}{18000 \times 6} =$ $5\frac{29}{30}$ mois = **5** mois **29** jours (*).

629. Problème **112**. *Quelqu'un emprunte une somme de* 7955^f, *pour le remboursement de laquelle il souscrit deux billets égaux, payables le premier dans* 1 *an, le second dans* 2 *ans. Trouver le montant de chaque billet, l'escompte en dedans étant de* 5$\frac{0}{0}$.

L'escompte étant en dedans, 1^f de la somme empruntée équivaut à 1·05 payable dans 1 an ou à 1·10^f payable dans 2 ans (**626**) : 1^f du premier billet vaut donc, actuellement, 1 : 1·05 = $\frac{20^f}{21}$, et 1^f du second billet vaut 1 : 1·10 = $\frac{10^f}{11}$. Par suite, si les deux billets étaient de 1^f chacun, ils vaudraient ensemble, actuellement, $\frac{20}{21} + \frac{10}{11} = \frac{430^f}{231}$. Comme ils valent ensemble,

(*) Soient A, A′, A″,... les valeurs nominales de divers billets, payables respectivement dans n, n', n'',... unités de temps, et soit r le taux par franc et par an de l'escompte en dedans; l'échéance moyenne x d'un billet unique, égal à la somme des billets proposés, est donnée par l'équation

$$\frac{A}{1+rn} + \frac{A'}{1+rn'} + \frac{A''}{1+rn''} + \ldots = \frac{A + A' + A'' + \ldots}{1+rx}.$$

On voit que, dans l'*escompte en dedans*, l'échéance moyenne varie avec le taux de l'escompte, ainsi qu'avec la date à laquelle on rapporte les valeurs des divers billets.

actuellement, 7955^f, chaque billet est donc d'autant de francs que $\frac{430^f}{231}$ sont contenus de fois dans 7955^f, ou 7955 : $\frac{430}{231}$ = **4273·50^f** (*).

Escompte composé.

630. L'escompte est *composé* lorsque la somme payée au porteur, augmentée de ses intérêts composés jusqu'à l'échéance, égale la valeur nominale ou le montant du billet.

L'escompte composé est donc *l'intérêt composé de la valeur actuelle du billet* depuis le jour du paiement jusqu'à celui de l'échéance.

Les problèmes d'escompte composé se résolvent de la même manière que les problèmes d'intérêt composé : la valeur actuelle du billet représente le capital placé, et la valeur nominale du billet est le capital définitif.

631. Problème **113**. *Trouver l'échéance moyenne de trois billets, le premier de* 39238·35^f, *payable dans* 2 *ans, le deuxième de* 70304^f, *payable dans* 3 *ans, le troisième de* 79715·10^f, *payable dans* 6 *ans, le taux de l'escompte composé étant* 4%.

Le montant du billet unique est de 39238·35^f + 70304^f + 79715·10^f = 189257·45^f, et *son échéance doit être telle que sa valeur actuelle égale la somme des valeurs actuelles des trois billets*, ou (**605**)

$$\frac{39238{\cdot}35^f}{1{\cdot}04^2}+\frac{70304^f}{1{\cdot}04^3}+\frac{79715{\cdot}10^f}{1{\cdot}04^6}=36278{\cdot}06^f+62500^f+63000^f=\mathbf{161778{\cdot}06^f}.$$

(*) On a, entre l'escompte en dehors et l'escompte en dedans, les relations suivantes, dont la seconde et la troisième n'avaient pas encore été signalées :

1° *L'escompte en dehors d'un billet est égal à l'escompte en dedans, plus l'intérêt de cet escompte en dedans ;*

2° *La valeur nominale d'un billet est égale au produit des escomptes en dehors et en dedans, divisé par leur différence ;* ou, autrement, *l'inverse de la valeur nominale d'un billet est égal à la différence des inverses des escomptes en dedans et en dehors* (**659**) ;

3° *Si l'on considère le taux par franc et par an de l'escompte en dehors et le taux par franc et par an de l'escompte en dedans, qui donnent le même escompte, le temps qui sépare le jour du paiement de celui de l'échéance est égale à la différence de ces deux taux divisée par leur produit,* ou, autrement, *à la différence des inverses de ces taux.*

On est donc ramené au problème suivant :

Un billet de 189 257·45^f *a une valeur actuelle de* 161 778·06^f, *le taux de l'escompte composé étant* 4$\frac{0}{0}$. *Quelle est l'époque de l'échéance?*

On trouve **607**) que le billet est payable dans **4** ans (*).

CHAPITRE XVI

DES RENTES SUR L'ÉTAT

632. Lorsqu'un gouvernement veut contracter un emprunt, *il émet des obligations* pour le montant du capital à emprunter. On dit, par exemple, qu'il émet ces obligations *au cours de* 90, s'il demande 90^f en argent pour une valeur nominale de 100^f. L'obligation est ordinairement payée par parties à des époques déterminées, ou au comptant avec escompte. Elle donne droit à la *rente*, c'est-à-dire aux intérêts, à un taux déterminé, de la valeur nominale. La rente est ordinairement payable par semestre.

Les titres de rente sont dits *nominatifs*, lorsqu'ils sont inscrits au nom du possesseur dans le grand livre de la dette publique, et *au porteur*, lorsqu'ils ne portent aucun nom.

Les acquéreurs primitifs des obligations peuvent les céder à d'autres. Le prix de vente varie suivant les circonstances. Le prix moyen, journellement coté à la Bourse, s'appelle le *cours de la rente*. On dit, par exemple, que la rente 3$\frac{0}{0}$ est au cours de 98$\frac{1}{2}$, lorsqu'on paie 98·50^f pour un capital

(*) Soient A, A', A'',... les valeurs nominales de divers billets, payables respectivement dans n, n', n'',... unités de temps, et soit r le taux par franc et par an de l'escompte composé : l'échéance moyenne x d'un billet unique, égal à la somme des billets proposés, est donnée par l'équation

$$\frac{A}{(1+r)^n} + \frac{A'}{(1+r)^{n'}} + \frac{A''}{(1+r)^{n''}} + \ldots = \frac{A + A' + A'' + \ldots}{(1+r)^x}.$$

On voit que, dans l'*escompte composé*, l'échéance moyenne varie avec le taux de l'escompte, mais qu'elle est indépendante de la date à laquelle on rapporte les valeurs des divers billets.

On simplifiera donc, dans la pratique, la recherche de l'échéance moyenne, en rapportant les dates des échéances des divers billets à la date de l'échéance du billet qui devrait être payé le premier.

nominal de 100f produisant 3f d'intérêt annuel. Quand le cours est 100, on dit que la rente est *au pair*.

Les ventes et achats de rente se font par l'intermédiaire des *agents de change*, qui prélèvent, pour leur entremise, 1 pour 1000 du capital de vente ou d'achat; cette rémunération ou *courtage* est payable à la fois par le vendeur et par l'acheteur. L'acquéreur de rentes paie au vendeur, outre la valeur des titres au cours du jour, les intérêts échus au moment de leur négociation.

Pour éteindre ou *amortir* l'emprunt, l'État prélève, chaque année, sur les impôts, une certaine somme, dont une partie est consacrée au service de la rente, et l'autre au rachat d'obligations qui sont ensuite annulées. Comme cette deuxième somme s'accroît, chaque année, des *arrérages* ou intérêts des rentes rachetées, l'emprunt peut être remboursé dans un temps relativement court. Quelquefois l'emprunt n'est pas amortissable; il constitue alors une *rente perpétuelle*.

633. Problème **114.** *La rente* $3\frac{0}{0}$ *étant au cours de* 101·20f, *quel capital faut-il débourser pour avoir* 1500f *de rente?*

Pour avoir 3f de rente, il faut payer 101·20f.

Pour avoir 1f de rente, il faut payer 3 fois moins, ou $\frac{101{\cdot}20^f}{3}$.

Pour avoir 1500f de rente, il faut payer 1500 fois plus, ou $\frac{101{\cdot}20^f \times 1500}{3}$ = **50600f**.

Si l'on tient compte du *courtage*, qui est de 1 pour 1000 du capital d'achat, il faut payer, en outre, à l'agent de change, 50600f : 1000 = **50·60f**.

634. Problème **115.** *On achète pour* 40580f *du* $3\frac{0}{0}$ *au cours de* 101·45. *Quel sera le montant de la rente?*

Pour 101·45f on a 3f de rente.

Pour 1f on a 101·45 fois moins, ou $\frac{3^f}{101{\cdot}45}$.

Pour 40580f on a 40580 fois plus, ou $\frac{3^f \times 40580}{101{\cdot}45}$ = **1200f**.

635. Problème **116.** *On a dépensé* 19902f *pour se faire* 535f *de rente* $2\frac{1}{2}$. *Quel était le cours de la rente?*

Pour avoir 535f de rente, on paie 19902f.

Pour avoir 1f de rente, on paie 535 fois moins, ou $\frac{19902^f}{535}$.

Pour avoir $2\frac{1}{2}$f de rente, on paie $2\frac{1}{2}$ fois plus, ou $\frac{19902^f \times 2{\cdot}50}{535} = \mathbf{93}^f$.

636. Problème **117.** *En achetant du $2\frac{1}{2}$ à 93·75, à quel taux réel place-t-on son argent?*

93·75f de capital rapportent 2·50f.

1f de capital rapporte 93·75 fois moins, ou $\frac{2{\cdot}50^f}{93{\cdot}75}$.

100f de capital rapportent 100 fois plus, ou $\frac{2{\cdot}50^f \times 100}{93{\cdot}75} = 2\frac{2}{3}^f$.

Ainsi, en achetant du $2\frac{1}{2}$ au cours de 93·75, on place son argent au taux réel de $\mathbf{2\frac{2}{3}}$.

***637.** Problème **118** (*). *Le gouvernement belge a contracté en* 1854 *un emprunt de* 26964600f *au cours de* 90, *portant intérêt à $4\frac{1}{2}$ à partir du* 1er *mai* 1854, *et garanti contre toute conversion avant* 1861 (**). *Sur cette somme, cinq millions ont été réservés au public, qui a été admis à souscrire le* 26 *juin. Les souscriptions se sont élevées à* 172279000f, *de telle sorte qu'on a dû réduire au $\frac{1}{34}$ chaque souscription. Les conditions de paiement par obligation de* 1000f *étaient ou de payer* 90f *le* 1er *juillet, le* 1er *août, le* 15 *novembre, le* 1er *février, le* 1er *mai, le* 1er *octobre, le* 1er *novembre et le* 1er *décembre et* 180f *le* 31 *décembre, ou de payer le tout au comptant le* 1er *juillet avec escompte de* 4 *l'an. Il était en outre alloué $\frac{1}{4}$ de commission sur la valeur nominale des obligations. Cela étant, on demande :*

1° *Pour quelle somme aurait dû souscrire une personne désirant avoir quatre obligations, si elle avait pu prévoir le résultat de la souscription;*

2° *Le coût de ces quatre obligations, dans l'hypothèse d'un paiement comptant;*

3° *Le cours réel correspondant au cours apparent* 90;

4° *Le taux de l'intérêt retiré du capital employé;*

(*) Snoeck, *Cours d'Arithmétique*, page 229.

(**) On appelle *conversion de la rente* l'opération par laquelle le gouvernement abaisse le taux de la rente. Le $4\frac{1}{2}$ belge a été converti en 4 en 1879, en $3\frac{1}{2}$ en 1886 et en 3 en 1895.

5° *Le montant des intérêts gagnés par anticipation;*

6° *Le gain que cette personne aurait réalisé en vendant le* 28 *juin ses quatre obligations à la Bourse de Bruxelles, sachant que cette rente était cotée* $93\frac{3}{4}$.

1° Chaque souscription ayant dû être réduite au $\frac{1}{34}$, cette personne aurait dû souscrire pour 34 fois 4 obligations de 1000f ou pour **136000f**.

2° En payant comptant, elle jouissait, pour chaque obligation, de l'escompte de 90f pour $106\frac{1}{2}$ mois, ce qui donne 31·95f, et, pour les quatre obligations, 127·80f. De plus, la commission de $\frac{1}{4}$ 0/0 sur 4000f s'élève à 10f. Elle n'avait donc à payer que 3600f moins 127·80f moins 10f ou **3462·20f**.

3° Elle a payé 3462·20f pour un capital nominal de 4000f, ce qui correspond à 86·55f pour un capital nominal de 100f : le cours réel est donc $\mathbf{86\frac{11}{20}}$.

4° Le capital payé 3462·20f produisant un intérêt annuel de 180f, c'est comme s'il était placé à $\mathbf{5\frac{1}{5}}$ 0/0 environ.

5° Les intérêts gagnés anticipativement sont ceux de 4000f du 1er mai au 1er juillet, c'est-à-dire pendant 2 mois : ils sont donc le $\frac{1}{6}$ de 180f ou **30f**.

6° Enfin, en revendant ses quatre obligations au cours de $93\frac{3}{4}$, cette personne aurait reçu 40 fois 93·75f ou 3750f. Elle aurait donc réalisé un bénéfice de 3750f — 3462·20f = **287·80f**.

Les intérêts que l'acheteur lui paierait outre le capital étant ceux auxquels la possession des titres lui donnerait droit au moment de la négociation, il n'y a pas lieu d'en tenir compte dans le calcul du gain réalisé.

Obligations des villes et des sociétés.

638. Le capital d'une société financière, commerciale ou industrielle est formé d'*actions* donnant droit à un *dividende* variable, dépendant des bénéfices annuels de la société.

De même que l'État, les villes et les sociétés ont souvent recours à des emprunts, et émettent des *obligations* donnant droit à un intérêt fixe. Ces obligations sont remboursables, quelquefois avec *prime*, par voie de *tirages* ayant lieu à des époques déterminées.

Dans la cote de certaines obligations, les intérêts échus sont compris dans le cours du jour (*).

639. Problème **119.** *Une société s'est formée au capital d'un million, divisé en* 1000 *actions de* 1000f *chacune. Elle a fait, dans le cours d'une année, un bénéfice de* 86 266f25c. *Les statuts allouent à la direction* 20% *de ce bénéfice. Quel est le dividende à répartir entre les associés?*

Après que la direction a prélevé sa part, il reste à répartir entre les associés les 0f80 de 86 266f25c, ou 69 013f, soit **69f013c** de dividende par action.

640. Problème **120.** *Quand on achète, au cours de* 271f50c, *des obligations remboursables à* 500f *et rapportant* 15f *d'intérêt, à quel taux place-t-on son argent, et quel bénéfice réalise-t-on sur six obligations dont une est sortie au tirage et dont les cinq autres sont revendues* 276f *l'une?*

En achetant au cours de 271f50c des obligations qui rapportent 15f d'intérêt, on place son argent au taux de $\frac{15^f \times 100}{271^f50} = \mathbf{5f525\%}$.

Les six obligations ont été achetées 1629f. L'une de ces obligations a été remboursée 500f et les cinq autres ont été revendues 1380f. Le bénéfice réalisé est donc de 500f + 1380f — 1629f = **251f**.

Des opérations de Bourse.

641. Il y a trois espèces d'opérations à la Bourse :

1° L'opération *au comptant*, qui consiste à acheter ou à vendre une valeur pour s'en livrer ou en livrer l'acheteur immédiatement ;

2° L'opération *à terme et ferme*, qui consiste à acheter ou à vendre aujourd'hui une valeur pour ne s'en livrer ou n'en livrer l'acheteur que le 15 courant ou fin du mois;

3° L'opération *à terme et à prime*, qui est un achat ou une vente à terme, avec la condition que l'acheteur ait le droit de renoncer à se livrer, en abandonnant au vendeur la *prime* qu'il lui paie en contractant le marché. Cette prime s'énonce ainsi : *dont* 50 *centimes, dont* 1 *franc, dont* 10 *francs*, etc.

(*) L'appât des *primes* fait ordinairement monter les obligations, ou *lots* des villes et des sociétés, à un cours qui est hors de toute proportion avec l'espérance mathématique de les obtenir.

Les primes se *répondent* à l'échéance, c'est-à-dire que l'acheteur déclare alors s'il entend *lever* ou *abandonner sa prime. Lever sa prime,* c'est se livrer des titres achetés conditionnellement; dans ce cas, le montant de la prime payée est imputée sur le montant du marché. *Abandonner sa prime,* c'est renoncer à se livrer des titres achetés conditionnellement; dans ce cas, la prime est acquise au vendeur.

Les opérations à terme se font par 50 000f de capital nominal pour les rentes et par 25 000f de capital nominal pour les autres valeurs.

A moins de conventions contraires, l'acheteur à terme a le droit de devancer l'échéance et de forcer son vendeur à le livrer; c'est ce qu'on appelle, en terme de Bourse, *escompter* son vendeur.

Lorsqu'un acheteur, qui a conclu un marché ferme, ou qui a déclaré lever sa prime, n'a pas les capitaux nécessaires, le vendeur a le droit de vendre les titres au cours du jour et de lui faire payer la *différence;* c'est ce qu'on appelle *exécuter* l'acheteur. L'exécution est la faillite de l'homme de Bourse.

Au lieu de se laisser exécuter, l'acheteur peut presque toujours trouver un capitaliste, qui, moyennant le paiement de la différence et un certain bénéfice, consent à lever les titres et à les lui revendre pour la prochaine liquidation; c'est ce qu'on appelle se faire *reporter.*

La *spéculation* à la Bourse consiste à acheter en baisse et à revendre en hausse. Comme les achats et les ventes peuvent se faire *au comptant, à terme ferme, à terme et à prime,* comme aussi les ventes peuvent se faire *à couvert* ou *à découvert,* c'est-à-dire en ayant ou non en sa possession, au moment de la vente, les titres vendus, il s'ensuit que les achats combinés avec les ventes peuvent donner lieu à vingt-sept opérations différentes.

Nous sortirions des limites de cet ouvrage, si nous en disions plus sur un sujet aussi étendu. Nous ne pouvons toutefois omettre d'ajouter que la morale des opérations et des manœuvres de Bourse n'est guère qu'une morale de convention, n'ayant le plus souvent rien de commun avec la justice naturelle; et que le résultat le plus constant de ces opérations est d'enrichir la haute banque et les agents de change, aux dépens des petits capitalistes.

CHAPITRE XVII

DU CHANGE ET DES ARBITRAGES

642. Les opérations de *change* ont pour but d'effectuer des paiements d'une place à l'autre, sans aucun transport de numéraire.

Si l'on veut, par exemple, de Paris, payer une certaine somme à Londres, on achète d'un banquier de Paris une *lettre de change* sur un banquier de Londres. On adresse cette lettre à son créancier, et celui-ci en touche le montant, énoncé en monnaie anglaise, chez le banquier de Londres.

Le *cours du change* est exprimé par les quantités de monnaie des deux pays qui s'équivalent au moment du change.

On appelle *arbitrage* la comparaison que l'on fait des cours des diverses places, afin de connaître la voie la plus avantageuse pour acquitter une dette ou payer une créance.

643. Problème **121.** *Quelle est, à Londres, la valeur en livres sterling d'un effet de* 1000^f *sur Paris à* 2 *mois d'échéance? On suppose que le cours du change à Londres est le suivant :* Paris — 3 mois — 25^{f}21 — 3$\frac{0}{0}$, *c'est-à-dire que l'on donne, à Londres,* 1 *livre sterling pour* 25^{f}21^f *payables à Paris à l'échéance de* 3 *mois, ou avant cette échéance avec escompte de* 3$\frac{0}{0}$.

On a :

$$x \text{ livres sterling à vue} = 1000 \text{ francs à 2 mois};$$
$$n \text{ francs à 2 mois} = 100 \text{ francs à 3 mois};$$
$$25^f21 \text{ francs à 3 mois} = 1 \text{ livre sterling à vue};$$

d'où (**516**)

$$x = \frac{1000 \times 100}{n \times 25^f21}.$$

Pour calculer n, on observe que 100^f à 3 mois valent, à 2 mois, 100^f moins l'escompte de 100^f pour 1 mois, ou $100 - \frac{3}{12} = 99\frac{3}{4}^f$. On a do

$$x = \frac{1000 \times 100}{99\frac{3}{4} \times 25^f21} = 39^f77.$$

Ainsi la valeur en espèces, à Londres, d'un effet de 1000^{f} sur Paris, à 2 mois d'échéance, est **39·77** livres sterling, ou (**454**) **39** livres sterling **15** shillings **5** pence.

***644.** Problème **122.** *Étant données les cotes d'Amsterdam et de Paris, on demande :*

1° *Le moyen le plus économique d'acquitter, à Paris, une dette de* 500 *florins, contractée envers un correspondant d'Amsterdam;*

2° *Le moyen le plus avantageux de recouvrer, à Paris, une créance de* 500 *florins, due par un correspondant d'Amsterdam;*

3° *L'opération à faire, à Paris, par un spéculateur qui dispose de* 100 000^{f}.

Cote d'Amsterdam :

Paris — 2 mois — 47·08 *florins pour* 100^{f} *— escompte* $3\frac{0}{0}$.
Londres — à vue — 12 *florins pour* 1 *livre sterling.*

Cote de Paris :

Amsterdam — 3 mois — 209^{f} *pour* 100 *florins — escompte* $3\frac{1}{2}\frac{0}{0}$.
Londres — 3 mois — 25·16^{f} *pour* 1 *livre sterling — escompte* $3\frac{1}{2}\frac{0}{0}$.

Pour le *papier sur Paris*, on a :

$$x \text{ francs à vue} = 500 \text{ florins à vue};$$
$$47{\cdot}08 \text{ florins à vue} = 100 \text{ francs à 2 mois};$$
$$100 \text{ francs à 2 mois} = n \text{ francs à vue};$$

d'où

$$x = \frac{500 \times 100 \times n}{47{\cdot}08 \times 100},$$

ou, à cause de $n = 99\frac{1}{2}$, $x =$ **1056·71**^{f}.

Pour le *papier sur Amsterdam*, on a :

$$x \text{ francs à vue} = 500 \text{ florins à vue};$$
$$n \text{ florins à vue} = 100 \text{ florins à 3 mois};$$
$$100 \text{ florins à 3 mois} = 209 \text{ francs à vue};$$

d'où

$$x = \frac{500 \times 100 \times 209}{n \times 100},$$

ou, à cause de $n = 99\frac{1}{8}$, $x =$ **1054·22**^{f}.

Pour le *papier sur Londres*, on a :

x francs à vue = 500 florins à vue;
12 florins à vue = 1 livre sterling à vue;
n livres sterling à vue = 100 livres sterling à 3 mois;
1 livre sterling à 3 mois = 25·16 francs à vue;

d'où

$$x = \frac{500 \times 100 \times 25{\cdot}16}{12 \times n},$$

ou, à cause de $n = 99\frac{1}{8}$, $x =$ **1057·59**^{f}.

On voit : 1° que, pour acquitter une dette de 500 florins, contractée envers un correspondant d'Amsterdam, on dépense à Paris :

1056·71^{f}, si l'on fait *tirer* d'Amsterdam sur Paris;
1054·22^{f}, si l'on achète du papier sur Amsterdam;
1057·59^{f}, si l'on achète du papier sur Londres :

il est donc préférable d'adresser à son correspondant d'Amsterdam des valeurs sur Amsterdam.

On voit : 2° qu'en recouvrant une créance de 500 florins, due par un correspondant d'Amsterdam, on encaisse à Paris :

1056·71^{f}, si l'on reçoit du papier sur Paris;
1054·22^{f}, si l'on reçoit du papier sur Amsterdam;
1057·59^{f}, si l'on reçoit du papier sur Londres :

il est donc préférable de se faire adresser de son correspondant d'Amsterdam des valeurs sur Londres.

On voit : 3° qu'en achetant à Paris des valeurs sur Amsterdam pour 1054·22^{f}, on peut faire encaisser, à Amsterdam, 500 florins à vue, et que, pour ces 500 florins, on peut se faire adresser d'Amsterdam des valeurs sur Londres, qu'on revendra 1057·59^{f} à Paris : on peut donc gagner 3·37^{f} sur un capital de 1054·22^{f}, et, par suite, sur un capital de 100 000^{f}, on peut gagner

$$\frac{3{\cdot}37^{f} \times 100000}{1054{\cdot}22} = \mathbf{319{\cdot}67}^{f}.$$

CHAPITRE XVIII

DES COMPTES COURANTS ET D'INTÉRÊTS

***645.** Un *compte courant et d'intérêts* est un tableau, divisé en deux parties, *doit* et *avoir*, qui présente, par ordre de dates, les valeurs dues réciproquement par deux personnes, avec les intérêts, escomptes, commissions, pertes de place, ainsi que le solde définitif dû par l'une des deux personnes à l'autre.

***646.** PROBLÈME **123.** M. LAMBERT, *banquier à Bruxelles, a réglé le compte de* M. LEGRELLE, *négociant à Anvers, le* 31 *décembre* 1895 : *ce compte se soldait par une somme de* 9820f *en faveur de* M. LEGRELLE.

Le 5 *février* 1896, M. LEGRELLE *remet à* M. LAMBERT, *en espèces*, 5520f.

Le 16 *mars*, M. LAMBERT *paie, pour le compte de* M. LEGRELLE, 7815f.

Le 30 *mai*, M. LEGRELLE *remet à* M. LAMBERT *un effet de* 3960f, *payable au* 10 *juin*.

Le 11 *juillet*, M. LAMBERT *avance à* M. LEGRELLE *une somme de* 4500f.

Enfin, le 25 *octobre*, M. LAMBERT *remet à* M. LEGRELLE *un effet de* 3645f, *payable au* 15 *novembre*.

On propose de régler, au 31 *décembre* 1896, *le compte de* M. LEGRELLE *avec son banquier*.

Le taux de l'intérêt est de $4\frac{0}{0}$ *pour le négociant et de* $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ *pour le banquier. De plus, le banquier prend une commission de* $\frac{1}{8}\frac{0}{0}$ *sur les sommes qu'il encaisse.*

Pour régler de pareils comptes, on porte à l'*avoir*, comme on le voit au tableau ci-joint, les sommes dues au négociant, ainsi que les intérêts de ces sommes à la date de la clôture du compte; on porte au *doit* les sommes dues au banquier, ainsi que les intérêts de ces sommes à la date de la clôture du compte et la commission du banquier sur les sommes qu'il a encaissées : la différence entre l'*avoir* et le *doit* constitue, suivant les cas, le *solde créditeur* ou le *solde débiteur* du négociant, le jour où l'on a clôturé le compte.

M. LEGRELLE, *négociant, à Anvers,*
son compte courant chez M. LAMBERT, *banquier, à Bruxelles,*
arrêté le 31 décembre 1896.

DOIT — AVOIR

DATES	SOMMES	LIBELLÉ DES OPÉRATIONS	ÉCHÉANCES	JOURS	NOMBRES	DATES	SOMMES	LIBELLÉ DES OPÉRATIONS	ÉCHÉANCES	JOURS	NOMBRES
1896						1896					
16 mars	7 815 »	Notre paiement p^r son compte . .	16 mars	75	586 125	1 janvier	9 820 »	Solde du compte précédent. . .	1 janvier	0	0
11 juillet	4 500 »	Nos espèces . .	11 juillet	192	864 000	5 février	5 520 »	Vos espèces . .	5 février	36	198 720
25 oct^bre	3 645 »	Un effet	15 nov^bre	319	1 162 755	30 mai	3 960 »	Un effet	10 juin	161	637 560
					2 612 880						836 280
	15 960 »	. . . . .	. . . .	360	5 745 600		19 300 »	. . . . .	. . . .	360	6 948 000
	391·59	Intér^t à $4\frac{1}{2}$ % : $\frac{1}{8000}$ de	. . . .	. . . .	3 132 720		679·08	Intér^t à 4 % : $\frac{1}{9000}$ de	. . . .	. . . .	6 111 720
	11·85	$\frac{1}{8}$ % sur 9480^f.					19 979·08				
	16 363·44					1 janvier 1897	**3 615·64**	**A nouveau en votre faveur.**			
	3 615·64	*Solde créditeur.*									
	19 979·08							S. E. O. O.			

Il n'y a lieu d'expliquer que la manière de calculer les intérêts.

Représentons, pour abréger, par A, B, C les trois sommes dues au négociant, et par D, E, F les trois sommes dues au banquier.

Les intérêts à $4\frac{0}{0}$ dus au négociant sont ceux de la somme A pendant 365 jours, de la somme B pendant 329 jours et de la somme C pendant 204 jours. Ces intérêts sont (**599**) le $\frac{1}{9000}$ de la somme

$$A.365 + B.329 + C.204,$$

ou, en prenant les *compléments à* 365 des nombres 365, 329, 204, le $\frac{1}{9000}$ de la somme

$$A(365 - 0) + B(365 - 36) + C(365 - 161),$$

ou de la différence

$$(A + B + C)365 - (A.0 + B.36 + C.161).$$

On observe que les nombres 365, 329, 204, qui désignent les nombres de jours à courir *depuis l'échéance de chaque somme jusqu'à la clôture du compte,* sont remplacés par les nombres 0, 36, 161, c'est-à-dire par les nombres de jours courus *depuis l'ouverture du compte jusqu'à l'échéance de chaque somme.*

On trouve, pareillement, que les intérêts à $4\frac{1}{2}\frac{0}{0}$ dus au banquier sont le $\frac{1}{8000}$ de la somme

$$D.290 + E.173 + F.46,$$

ou de la différence

$$(D + E + F)365 - (D.75 + E.192 + F.319).$$

Dans la pratique, on multiplie les sommes A + B + C et D + E + F par 360, au lieu de les multiplier par 365.

Le compte se solde par une somme de **3615'64**^{f} en faveur de M. Legrelle.

La méthode précédente, dite *rétrograde* ou *indirecte,* permet de dresser le compte courant au fur et à mesure des remises réciproques, et de l'arrêter à une époque quelconque.

647. Problème **124.** *Même problème que le précédent, les intérêts étant réciproques et au taux de* $4\frac{0}{0}$.

Lorsque le taux de l'intérêt est *réciproque*, il suffit de porter, au *doit* ou à l'*avoir*, suivant les cas, la *balance des intérêts*, c'est-à-dire la différence entre les intérêts dus au négociant et les intérêts dus au banquier.

Comme on l'a vu précédemment, les intérêts à $4\frac{0}{0}$ dus au négociant sont le $\frac{1}{9000}$ de la différence

$$(A + B + C)360 - (A.0 + B.36 + C.161).$$

Pareillement, les intérêts à $4\frac{0}{0}$ dus au banquier sont le $\frac{1}{9000}$ de la différence

$$(D + E + F)360 - (D.75 + E.192 + F.319).$$

La *balance des intérêts*, à l'avantage du négociant, est donc le $\frac{1}{9000}$ de la *balance des nombres*, c'est-à-dire de la différence

$$\begin{gathered}(A + B + C)360 - (A.0 + B.36 + C.161)\\ - (D + E + F)360 + (D.75 + E.192 + F.319),\end{gathered}$$

ou, en désignant la *balance des capitaux* $(A + B + C) - (D + E + F)$ par M, le $\frac{1}{9000}$ de la différence

$$(D.75 + E.192 + F.319 + M.360) - (A.0 + B.36 + C.161).$$

Ainsi, *pour calculer la balance des intérêts :* 1° *on écrit le produit de chaque somme, au* doit *et à l'*avoir, *par le nombre de jours compris entre celui où l'on ouvre le compte et celui de l'échéance de cette somme;* 2° *on écrit, du côté où la somme des capitaux est la plus faible, le produit de la balance des capitaux par* 360, *ou, plus généralement, par le nombre de jours compris entre celui où l'on ouvre et celui où l'on clôture le compte;* 3° *on écrit, du côté où la somme des nombres est la plus faible, le quotient de la balance des nombres par le diviseur correspondant au taux de l'intérêt : ce quotient est la balance cherchée des intérêts.*

Le compte se solde par une somme de **3659'15f** en faveur de M. Legrelle.

M. LEGRELLE, *négociant, à Anvers,*
son compte courant et d'intérêts réciproques à 4 0/0 chez M. LAMBERT, *banquier, à Bruxelles,*
arrêté le 31 *décembre* 1896.

DOIT — AVOIR

DATES	SOMMES	LIBELLÉ DES OPÉRATIONS	ÉCHÉANCES	JOURS	NOMBRES	DATES	SOMMES	LIBELLÉ DES OPÉRATIONS	ÉCHÉANCES	JOURS	NOMBRES
1896						1896					
16 mars	7 815 »	N/paiement pour s/compte. . .	16 mars	75	586 125	1 janvier	9 820 »	Solde du compte précédent . .	1 janvier	0	0
11 juillet	4 500 »	N/espèces . . .	11 juillet	192	864 000	5 février	5 520 »	V/espèces . . .	5 février	36	198 720
25 octbre	3 645 »	Un effet	15 novbre	319	1 162 755	30 mai	3 960 »	Un effet	10 juin	161	637 560
	15 960 »	*Bal. des cap*x 3340f.	. . . .	360	1 202 400		19 300 »				836 280
					3 815 280			*Balance des nombres*	. . . .	. .	2 979 000
							331 »	*Balance des intérêts*			3 815 280
	11·85	1/8 0/0 sur 9480f.					19 631 »				
	3 659·15	*Solde créditeur.*				1 janvier 1897	**3 659·15**	**A nouveau en votre faveur.**			
	19 631 »										
								S. E. O. O.			

CHAPITRE XIX

DES ANNUITÉS

648. On appelle *annuité* une somme, ordinairement constante, payable chaque année, ou, plus généralement, à des intervalles de temps égaux.

649. Problème **125.** *Une somme de* 1250^f *est payable pendant* 10 *années consécutives, au commencement ou à la fin de chacune de ces dix années : quelle est, au bout de ce temps, la valeur des dix annuités, si l'on tient compte des intérêts composés au taux de* 4 $\frac{0}{0}$?

1° Supposons d'abord l'annuité payable au commencement de chaque année.

La première annuité peut être placée à intérêt composé pendant 10 ans, et elle vaut, après ce temps, $1250^f \times 1{\cdot}04^{10}$ (**604**); la deuxième annuité peut être placée pendant 9 ans, et elle vaut, après ce temps, $1250^f \times 1{\cdot}04^9$, et ainsi de suite jusqu'à la dernière annuité, qui peut être placée pendant 1 an, et vaut, après ce temps, $1250^f \times 1{\cdot}04$. On a donc, pour la valeur totale des dix annuités, au bout des 10 ans,

$$V = 1250^f \times 1{\cdot}04^{10} + 1250^f \times 1{\cdot}04^9 + \ldots + 1250^f \times 1{\cdot}04^2 + 1250^f \times 1{\cdot}04,$$

ou

$$V = 1250^f \times 1{\cdot}04 \times (1 + 1{\cdot}04 + \ldots + 1{\cdot}04^8 + 1{\cdot}04^9).$$

La quantité entre parenthèses est la somme des termes d'une progression par quotient dont le premier terme est 1, la raison 1·04 et le dernier terme $1{\cdot}04^9$; elle est donc égale (**396**) à

$$\frac{1{\cdot}04^9 \times 1{\cdot}04 - 1}{1{\cdot}04 - 1} \quad \text{ou à} \quad \frac{1{\cdot}04^{10} - 1}{0{\cdot}04}.$$

Par suite, la valeur des dix annuités, au bout des 10 ans, est

$$V = 1250^f \times 1{\cdot}04 \times \frac{1{\cdot}04^{10} - 1}{0{\cdot}04} = 1250^f \times 1{\cdot}04 \times \frac{0{\cdot}48024428}{0{\cdot}04} = \mathbf{15607{\cdot}94^f}.$$

2° Si l'annuité est payable à la fin de chaque année, on a

$$V = 1250^f \times 1{\cdot}04^9 + 1250^f \times 1{\cdot}04^8 + \ldots + 1250^f \times 1{\cdot}04 + 1250^f,$$

ou

$$V = 1250^f \times \frac{1{\cdot}04^{10} - 1}{0{\cdot}04} = 1250^f \times \frac{0{\cdot}48024428}{0{\cdot}04} = \mathbf{15007{\cdot}63^f}.$$

650. Problème **126**. *Une somme de* 1250^f *est payable pendant* 10 *années consécutives, au commencement ou à la fin de chacune de ces dix années : quelle est la valeur actuelle des dix annuités, si l'on tient compte des intérêts composés au taux de* $4\frac{0}{0}$?

1° Supposons d'abord l'annuité payable au commencement de chaque année.

La première annuité, payable au commencement de la première année, vaut, actuellement, 1250^f; la deuxième annuité, payable au commencement de la deuxième année, vaut, actuellement, c'est-à-dire 1 an plus tôt, $\frac{1250^f}{1{\cdot}04}$ (**605**) ; la troisième annuité, payable au commencement de la troisième année, vaut, actuellement, c'est-à-dire 2 ans plus tôt, $\frac{1250^f}{1{\cdot}04^2}$, et ainsi de suite. On a donc, pour la valeur actuelle totale des dix annuités,

$$v = 1250^f + \frac{1250^f}{1{\cdot}04} + \frac{1250^f}{1{\cdot}04^2} + \ldots + \frac{1250^f}{1{\cdot}04^8} + \frac{1250^f}{1{\cdot}04^9},$$

ou, en multipliant tous les termes par $1{\cdot}04^9$,

$$\begin{aligned} v \times 1{\cdot}04^9 &= 1250^f \times 1{\cdot}04^9 + 1250^f \times 1{\cdot}04^8 + \ldots + 1250^f \times 1{\cdot}04 + 1250^f \\ &= 1250^f \times (1 + 1{\cdot}04 + \ldots + 1{\cdot}04^8 + 1{\cdot}04^9) \\ &= 1250^f \times \frac{1{\cdot}04^{10} - 1}{0{\cdot}04}, \end{aligned}$$

d'où

$$v = 1250^f \times \frac{1{\cdot}04^{10} - 1}{1{\cdot}04^9 \times 0{\cdot}04} = 1250^f \times \frac{0{\cdot}48024428}{1{\cdot}42331181 \times 0{\cdot}04} = \mathbf{10544{\cdot}16^f}.$$

2° Si l'annuité est payable à la fin de chaque année, on a

$$v = \frac{1250^f}{1{\cdot}04} + \frac{1250^f}{1{\cdot}04^2} + \ldots + \frac{1250^f}{1{\cdot}04^9} + \frac{1250^f}{1{\cdot}04^{10}},$$

ou

$$v = 1250^f \times \frac{1{\cdot}04^{10} - 1}{1{\cdot}04^{10} \times 0{\cdot}04} = 1250^f \times \frac{0{\cdot}48024428}{1{\cdot}48024428 \times 0{\cdot}04} = \mathbf{10138{\cdot}62^f}\ (^*).$$

651. Problème **127.** *Quelle est l'annuité à payer à la fin de chaque année pour rembourser, en 9 ans, un emprunt de 100000f? On supposera que le taux de l'intérêt est de 5 0/0 ou de 4 0/0 et le taux de l'amortissement de 4 0/0, et on dressera le tableau de l'amortissement.*

1° L'annuité cherchée se compose de deux parties, l'une, de **5000f** ou de **4000f**, destinée au paiement de l'intérêt annuel du capital emprunté; l'autre, d'une valeur inconnue, destinée à l'*amortissement*, ou à la formation d'un capital égal au capital emprunté.

Si l'on désigne par x cette seconde partie de l'annuité, on a (**649**), pour la valeur du capital formé au bout des 9 années,

$$x^f \times \frac{1{\cdot}04^9 - 1}{0{\cdot}04} = 100000^f,$$

d'où

$$x = \frac{100000^f \times 0{\cdot}04}{1{\cdot}04^9 - 1} = \frac{100000^f \times 0{\cdot}04}{0{\cdot}42331181} = \mathbf{9449{\cdot}30^f}.$$

L'annuité totale, comprenant l'intérêt et l'amortissement, s'élève donc à $5000^f + 9449{\cdot}30^f = \mathbf{14449{\cdot}30^f}$, ou à $4000^f + 9449{\cdot}30^f = \mathbf{13449{\cdot}30^f}$ (**).

2° Pour dresser le tableau de l'amortissement, on fait la somme de l'amor-

---

(*) Soient a l'annuité, n le nombre d'années ou d'annuités, r le taux par franc et par an de l'intérêt composé, V la valeur des n annuités, *au bout des* n *années*, et v la valeur actuelle, ou *au commencement de la première année;* on a

$$V = a(1+r) \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}, \qquad v(1+r)^{n-1} = a \times \frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

si l'annuité est payable au commencement de chaque année, et

$$V = a \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}, \qquad v(1+r)^n = a \times \frac{(1+r)^n - 1}{r},$$

si l'annuité est payable à la fin de chaque année.

(**) Si l'on appelle A le capital emprunté, a l'annuité, n le nombre d'annuités, r le taux de l'intérêt et r' le taux de l'amortissement, on a

$$(a - Ar) \times \frac{(1+r')^n - 1}{r'} = A.$$

Si $r' = r$, cette formule devient

$$A(1+r)^n = a \times \frac{(1+r)^n - 1}{r}.$$

tissement de la première année et de ses intérêts à $4\frac{0}{0}$ pendant la deuxième année; on ajoute l'amortissement de la deuxième année et ses intérêts à $4\frac{0}{0}$ pendant la troisième année, et ainsi de suite jusqu'à la neuvième année, à la fin de laquelle on doit trouver un capital égal au capital emprunté.

ANNÉES	CAPITAL AU COMMENCEMENT DE CHAQUE ANNÉE	INTÉRÊTS A 4 POUR CENT	CAPITAL ET INTÉRÊTS	AMORTISSEMENT ANNUEL	CAPITAL A LA FIN DE CHAQUE ANNÉE
1	—	—	—	9 449·30	9 449·30
2	9 449·30	377·97	9 827·27	9 449·30	19 276·57
3	19 276·57	771·06	20 047·63	9 449·30	29 496·93
4	29 496·93	1 179 88	30 676·81	9 449·30	40 126·11
5	40 126·11	1 605·04	41 731·15	9 449·30	51 180·45
6	51 180·45	2 047·22	53 227·67	9 449·30	62 676·97
7	62 676·97	2 507·08	65 184·05	9 449 30	74 633·35
8	74 633·35	2 985·33	77 618·68	9 449·30	87 067·98
9	87 067·98	3 482·72	90 550·70	9 449·30	100 000·00

652. Problème **128.** *Une Compagnie contracte un emprunt d'un million, au taux de $5\frac{0}{0}$. Cet emprunt est divisé en 2000 obligations de 500f, et doit être amorti en 12 années. Calculer l'annuité, c'est-à-dire la somme que la Compagnie doit consacrer chaque année au paiement des intérêts et au rachat des obligations, et dresser le tableau de l'amortissement.*

1° A la fin de la première année, la Compagnie doit, capital et intérêts, $1000000^f \times 1{\cdot}05$, et elle paie, intérêts et amortissement, une certaine somme x : elle doit donc encore, à la fin de la première année,

$$1\,000000^f \times 1{\cdot}05 - x^f.$$

A la fin de la deuxième année, la Compagnie doit, capital et intérêts, $1000000^f \times 1{\cdot}05^2 - x^f \times 1{\cdot}05$, et elle paie, intérêts et amortissement, une somme x : elle doit donc encore, à la fin de la deuxième année,

$$1\,000000^f \times 1{\cdot}05^2 - x^f \times 1{\cdot}05 - x^f.$$

Elle doit, de même, à la fin de la troisième année,

$$1\,000000^f \times 1{\cdot}05^3 - x^f \times 1{\cdot}05^2 - x^f \times 1{\cdot}05 - x^f,$$

et ainsi de suite, et, enfin, au bout de la douzième année,

$$1\,000\,000^f \times 1{\cdot}05^{12} - x^f \times 1{\cdot}05^{11} - x^f \times 1{\cdot}05^{10} - \ldots - x^f \times 1{\cdot}05 - x^f.$$

Comme l'emprunt se trouve alors amorti, on a

$$1\,000\,000^f \times 1{\cdot}05^{12} - x^f \times 1{\cdot}05^{11} - x^f \times 1{\cdot}05^{10} - \ldots - x^f \times 1{\cdot}05 - x^f = 0,$$

d'où

$$1\,000\,000^f \times 1{\cdot}05^{12} = x^f \times (1 + 1{\cdot}05 + \ldots + 1{\cdot}05^{10} + 1{\cdot}05^{11}),$$

ou

$$1\,000\,000^f \times 1{\cdot}05^{12} = x^f \times \frac{1{\cdot}05^{12} - 1}{0{\cdot}05},$$

d'où

$$x = \frac{1\,000\,000^f \times 1{\cdot}05^{12} \times 0{\cdot}05}{1{\cdot}05^{12} - 1}$$

$$= \frac{1\,000\,000^f \times 1{\cdot}79585633 \times 0{\cdot}05}{0{\cdot}79585633} = \mathbf{112\,825{\cdot}41^f}.$$

2° Pour dresser le tableau de l'amortissement, on calcule, année par année, l'intérêt des obligations en circulation et le nombre d'obligations que l'on peut amortir avec le surplus de l'annuité. Ce nombre d'obligations étant nécessairement entier, chaque annuité laisse un *résidu* que l'on ajoute, avec son intérêt à 5 %, à l'annuité suivante.

ANNÉES	CAPITAL A AMORTIR	OBLIGATIONS EN CIRCULATION	SOMMES AFFECTÉES A L'INTÉRÊT	NOMBRE D'OBLIGATIONS A AMORTIR	SOMMES AFFECTÉES A L'AMORTISSEMENT	TOTAL DE L'ANNUITÉ
1	1000 000	2000	50 000	125	62 500	112 500
2	937 500	1875	46 875	132	66 000	112 875
3	871 500	1743	43 575	139	69 500	113 075
4	802 000	1604	40 100	145	72 500	112 600
5	729 500	1459	36 475	153	76 500	112 975
6	653 000	1306	32 650	160	80 000	112 650
7	573 000	1146	28 650	168	84 000	112 650
8	489 000	978	24 450	177	88 500	112 950
9	400 500	801	20 025	186	93 000	113 025
10	307 500	615	15 375	195	97 500	112 875
11	210 000	420	10 500	204	102 000	112 500
12	108 000	216	5 400	216	108 000	113 400

CHAPITRE XX

QUESTIONS SUR LA POPULATION

653. Lorsque l'accroissement de la population par la succession des années est supposé se faire d'une manière régulière, la loi de cet accroissement est semblable à celle de l'accroissement d'un capital par l'accumulation des intérêts, c'est-à-dire que cet accroissement a lieu suivant une *progression par quotient*. Si, par exemple, la population d'une ville est de 100000 habitants, et qu'elle s'accroisse, chaque année, de $\frac{1}{200}$, la population de cette ville, après 1, 2, 3, 4... années, sera respectivement

$$100000 \times \tfrac{201}{200}, \quad 100000 \times (\tfrac{201}{200})^2, \quad 100000 \times (\tfrac{201}{200})^3, \quad 100000 \times (\tfrac{201}{200})^4 \ldots$$

Les problèmes sur la population se résolvent donc de la même manière que les problèmes d'intérêt composé.

654. Problème **129**. *La population de la Belgique était, au 31 décembre* 1831, *de* 3785814 *habitants, et, au* 31 *décembre* 1890, *de* 6069321 *habitants. Trouver l'accroissement moyen annuel de la population en Belgique. Après combien de temps sera-t-elle doublée?*

1° Si l'on désigne par k le rapport, supposé constant, dans lequel croît annuellement la population en Belgique, on aura

$$3785814 \times (1 + k)^{59} = 6069321,$$

d'où

$$\log(1 + k) = 0{\cdot}00347, \quad 1 + k = 1{\cdot}008, \quad k = 0{\cdot}008.$$

L'accroissement moyen annuel de la population est de **0·008** ou $\frac{1}{125}$.

2° Si l'on désigne par n le temps après lequel la population sera doublée, on aura

$$(1 + k)^n = 2,$$

d'où

$$n = \frac{\log 2}{\log(1 + k)} = \frac{0{\cdot}30103}{0{\cdot}00347} = 87 \text{ ans.}$$

La population sera doublée en **87** ans.

CHAPITRE XXI

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

655. On appelle *problèmes du second degré* ceux dont la solution algébrique dépend d'une équation du second degré.

Un certain nombre de ces problèmes peuvent être résolus par l'Arithmétique, et, en particulier, ceux qui se ramènent à *trouver deux nombres, connaissant leur produit, ainsi que leur somme* (**656**), *ou leur différence* (**657**), *ou la somme ou la différence* (**658**) *de leurs inverses.*

***656.** Problème **130.** *Trouver deux nombres, connaissant leur somme* $5\frac{5}{6}$ *et leur produit* $8\frac{1}{3}$ (**530**) (*).

Pour n'avoir à faire qu'à des nombres entiers, supposons que l'on multiplie par 6 chacun des deux nombres cherchés : leur somme sera multipliée par 6, et, par suite, elle sera égale à $5\frac{5}{6} \times 6 = 35$, et leur produit sera multiplié par 36, et, par suite, il sera égal à $8\frac{1}{3} \times 36 = 300$.

On est ainsi ramené à *trouver deux nombres, connaissant leur somme* 35 *et leur produit* 300 (**).

Or, si l'on décompose 300 en deux facteurs entiers, de toutes les manières possibles, savoir (**148**),

1	2	3	4	5	6	10	12	15
300	150	100	75	60	50	30	25	20,

on trouve que les facteurs qui ont pour somme 35 sont 15 et 20.

Par suite, les deux nombres cherchés sont $15 : 6 = \mathbf{2\frac{1}{2}}$ et $20 : 6 = \mathbf{3\frac{1}{3}}$.

(*) Par exemple, *trouver les deux dimensions d'un champ rectangulaire, sachant que son périmètre est de* $5\frac{5}{6}$ *décamètres, et sa surface de* $8\frac{1}{3}$ *ares.*

(**) On peut démontrer que, *si la somme et le produit de deux nombres sont entiers, ces deux nombres sont aussi entiers.*

On peut encore résoudre le même problème de la manière suivante :

Le carré de la différence de deux nombres est égale au carré de leur somme, diminué de leur quadruple produit (*). Le carré de la différence des deux nombres cherchés est donc égale à $(5\frac{5}{6})^2 - 4 \times 8\frac{1}{3} = \frac{1225}{36} - \frac{100}{3} = \frac{25}{36}$. Par suite, cette différence est égale à la racine carrée de $\frac{25}{36}$, ou à $\frac{5}{6}$.

On est ainsi ramené à *trouver deux nombres, connaissant leur somme* $5\frac{5}{6}$ *et leur différence* $\frac{5}{6}$.

Ces deux nombres sont $\mathbf{3\frac{1}{3}}$ et $\mathbf{2\frac{1}{2}}$ (**660**).

***657.** Problème **131.** *Trouver deux nombres, connaissant leur différence* $1\frac{5}{6}$ *et leur produit* 12 (**).

Si l'on multiplie les deux nombres inconnus par 6, on est ramené à *trouver deux nombres, connaissant leur différence* $1\frac{5}{6} \times 6$ *ou* 11, *et leur produit* 12×36 *ou* 432 (***).

En décomposant 432 en deux facteurs de toutes les manières possibles, savoir,

1	2	3	4	6	8	9	12	16	18
432	216	144	108	72	54	48	36	27	24,

on voit que les facteurs qui ont pour différence 11 sont 27 et 16.

Par suite, les deux nombres cherchés sont $27 : 6 = \mathbf{4\frac{1}{2}}$ et $16 : 6 = \mathbf{2\frac{2}{3}}$.

On peut encore résoudre le même problème de la manière suivante :

Le carré de la somme de deux nombres est égal au carré de leur différence, augmenté de leur quadruple produit (****). Le carré de la somme des deux nombres cherchés est donc égale à $(1\frac{5}{6})^2 + 4.12 = \frac{121}{36} + 48 = \frac{1849}{36}$. Par suite, cette somme est égale à la racine carrée de $\frac{1849}{36}$, ou à $7\frac{1}{6}$.

(*) On a

$$(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab.$$

(**) Par exemple, *calculer les deux dimensions d'un rectangle, sachant que la longueur a* $1\frac{5}{6}$ *mètre de plus que la largeur et que sa surface est de* 12 *mètres carrés.*

(***) On peut démontrer que, *si la différence et le produit de deux nombres sont entiers, ces deux nombres sont aussi entiers.*

(****) On a

$$(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab.$$

On est ainsi ramené à *trouver deux nombres, connaissant leur somme* $7\frac{1}{6}$ *et leur différence* $1\frac{5}{6}$.

Ces deux nombres sont (**660**) $\mathbf{4\frac{1}{2}}$ et $\mathbf{2\frac{2}{3}}$.

***658.** Problème **132.** *Un certain nombre de personnes ont été condamnées à payer solidairement, par parts égales, une somme de* 4200f. *Trois d'entre elles étant insolvables, cette circonstance augmente de* 70f *la part de chacune des autres. On demande combien de personnes ont été condamnées.*

Soient m le nombre de personnes condamnées et n le nombre de personnes solvables.

La différence entre m et n étant égale à 3, on a $m - n = 3$.

Si les m personnes eussent été solvables, chacune d'elles aurait payé la m^e partie de la somme totale, ou $\frac{1}{m}$. Comme n personnes sont solvables, chacune de celles-ci doit payer la n^e partie de la somme totale, ou $\frac{1}{n}$. D'après l'énoncé, la différence entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{m}$ est égale à 70f, ou à $70 : 4200 = \frac{1}{60}$ de la somme totale. Or $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{m-n}{mn} = \frac{3}{mn}$. Donc $\frac{3}{mn} = \frac{1}{60}$, ou, *en réduisant ces deux fractions au même numérateur,* $\frac{3}{mn} = \frac{3}{180}$, d'où $mn = 180$.

On est ainsi ramené à *trouver deux nombres* m *et* n, *connaissant leur différence* 3 *et leur produit* 180.

Ces deux nombres sont 15 et 12, et, par suite, le nombre des personnes condamnées est **15.**

***659.** Problème **133.** *Calculer l'escompte en dehors et l'escompte en dedans d'un billet de* 8040f, *sachant que la différence de ces escomptes est de* 0'20f.

On sait (**629**) que *la valeur nominale d'un billet est égale au produit de ses escomptes en dehors et en dedans, divisé par leur différence.* Par suite, le produit des deux escomptes est égal à leur différence multipliée par la valeur nominale du billet, ou à $0'20^f \times 8040 = 1608^f$.

On est ainsi ramené à *trouver deux nombres, connaissant leur produit* 1608 *et leur différence* 0'20.

On trouve que les deux escomptes sont **40'20f** et **40f**.

CHAPITRE XXII

PROBLÈMES DIVERS

660. Problème **134.** *La somme de deux nombres est* 45 *et leur différence est* 11. *Quels sont ces nombres?*

Si l'on augmentait le plus petit nombre de 11, il deviendrait égal au plus grand, et la somme des deux nombres serait 45 + 11 ou 56. Donc le plus grand nombre égale 56 : 2 ou **28.**

De même, si l'on diminuait le plus grand nombre de 11, il deviendrait égal au plus petit, et la somme des deux nombres serait 45 — 11 ou **34**. Donc le plus petit nombre égale 34 : 2 ou **17**.

En général, *de deux nombres, le plus grand est égal à leur demi-somme plus leur demi-différence, et le plus petit est égal à leur demi-somme moins leur demi-différence.*

661. Problème **135.** *Trouver un nombre qui, divisé par* 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, *donne respectivement pour restes* 6, 7, 8, 9, 11, 13, 14.

Si l'on augmentait le nombre cherché de 1, il serait exactement divisible par 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15 : il serait donc un commun multiple de ces nombres, ou (**188**) un multiple de leur plus petit commun multiple 2520. Par suite, le nombre cherché est un multiple de 2520, moins 1, c'est-à-dire l'un des nombres **2519, 5039, 7559, 10079, 12599**, etc.

662. Problème **136.** *Quel même nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction* $\frac{3}{11}$ *pour que la nouvelle fraction soit égale à* $\frac{5}{7}$?

La différence entre les deux termes de la fraction $\frac{3}{11}$ est 11 — 3 ou 8.

Si l'on ajoute un même nombre aux deux termes de cette fraction, la différence entre les deux termes de la nouvelle fraction, *non simplifiée,* sera encore 8 (**28**).

Mais, après simplification, cette différence est 7 — 5 ou 2.

Pour la rendre égale à 8, il faut multiplier les deux termes de la fraction $\frac{5}{7}$ par 8 : 2 ou par 4, ce qui donne $\frac{20}{28}$.

Ainsi la nouvelle fraction, non simplifiée, est $\frac{20}{28}$: donc le nombre que l'on doit ajouter aux deux termes de la fraction $\frac{3}{11}$ est 20 — 3 ou 28 — 11 ou **17**.

663. Problème **137.** *Trouver les dénominateurs des fractions ordinaires irréductibles donnant naissance à des fractions décimales périodiques simples, dont la période ait trois chiffres.*

Puisque la fraction périodique est simple et que la période a trois chiffres, la génératrice est une fraction dont le dénominateur est 999 (**317**). Après réduction de cette fraction à sa plus simple expression, le nouveau dénominateur est un diviseur de 999. Or les diviseurs de 999 sont **1, 3, 9, 27, 37, 111, 333, 999.** Tels sont donc les dénominateurs demandés.

Toutefois, on ne peut admettre les dénominateurs 1, 3, 9, diviseurs de 9, qu'à la condition de prendre trois périodes pour une seule.

664 Problème **138.** *La circonférence de la Terre étant égale à* 40000000^m, *trouver la longueur du mille marin, de* 60 *au degré de l'équateur.*

Les 360 degrés de l'équateur ayant une longueur de 40000000^m, la longueur d'un degré égale $40000000^m : 360 = 111111^m$; et, puisqu'il y a 60 milles marins au degré, la longueur du mille marin égale $111111^m : 60 = \mathbf{1852^m}$.

665. Problème **139.** *Un navire file* 9 *nœuds à l'heure. Évaluer cette vitesse :* 1° *en milles marins ;* 2° *en mètres. On sait que le nœud est la* 120e *partie du mille marin* (**448**) *et que le mille marin, de* 60 *au degré de l'équateur, vaut* 1852^m (**664**).

1° On dit qu'un navire file 9 nœuds *à l'heure*, lorsque, le loch étant lancé à la mer, 9 nœuds filent entre les doigts du timonier, pendant le temps que l'ampoulette met à se vider, c'est-à-dire *en* 30 *secondes*.

Ainsi, en 30 secondes, le navire parcourt 9 nœuds, ou $\frac{9}{120}$ de mille marin; en 1 minute ou 60 secondes, il parcourt 2 fois plus, ou $\frac{9}{60}$ de mille marin, et en 1 heure ou 60 minutes, il parcourt 60 fois plus, ou **9** milles marins.

On voit qu'un navire parcourt autant de milles à l'heure qu'il file de nœuds en 30 secondes; c'est pour cela que l'on dit qu'*il file* 9 *nœuds à l'heure*, pour dire qu'*il parcourt* 9 *milles à l'heure*.

2° Le mille marin, de 60 au degré de l'équateur, valant 1852^m, la vitesse du navire, en mètres, est $1852^m \times 9 = \mathbf{16668^m}$.

666. Problème **140.** *Un ouvrier pourrait faire un certain ouvrage en* 12^h; *un autre pourrait le faire en* 15^h. *Combien faudra-t-il de temps aux deux ouvriers, travaillant ensemble, pour faire cet ouvrage?*

Le premier ouvrier fait, en 1^h, le $\frac{1}{12}$ de l'ouvrage, et le second en fait le $\frac{1}{15}$; ils font donc ensemble, en 1^h, $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{3}{20}$ de l'ouvrage.

Pour faire les $\frac{3}{20}$ de l'ouvrage, il faut aux deux ouvriers 1^h de travail.

Pour faire $\frac{1}{20}$ de l'ouvrage, il leur faut 3 fois moins de temps, ou $\frac{1^h}{3}$.

Et, pour faire tout l'ouvrage, il leur faut 20 fois plus de temps, ou $\frac{20^h}{3}$, ou $\mathbf{6\frac{2}{3}^h}$.

On résoudrait de la même manière le problème suivant :

Une fontaine peut remplir un bassin en 12^h; *une autre fontaine peut le remplir en* 15^h. *Combien faudra-t-il de temps aux deux fontaines, coulant ensemble, pour remplir ce bassin?*

667. Problème **141.** *Deux courriers* A *et* B *sont distants de* 3^{km} *et marchent dans le même sens,* A *derrière* B. A *parcourt* $5\frac{1}{2}^{km}$ *à l'heure, et* B 4^{km}. *Après combien de temps le courrier* A *atteindra-t-il le courrier* B?

Le courrier A parcourt de plus que B, en 1 heure, $5\frac{1}{2}^{km} - 4^{km} = 1\frac{1}{2}^{km}$. Il lui faudra donc autant d'heures pour atteindre B, qui a une avance de 3^{km}, que $1\frac{1}{2}^{km}$ est contenu de fois dans 3^{km}, ou $3 : 1\frac{1}{2} = \mathbf{2}$ heures.

668. Problème **142.** *Un père a* 40 *ans, et son fils en a* 12. *Quand l'âge du père sera-t-il triple de celui du fils?*

La différence des deux âges est constante et égale à 28 ans. Or, quand l'âge du père sera triple de celui du fils, la différence de leurs âges sera le double de l'âge du fils. Le fils aura donc alors $28 : 2 = 14$ ans, et le père aura $14 \times 3 = \mathbf{42}$ ans.

C'est donc dans **2** ans que l'âge du père sera triple de celui du fils.

669. Problème **143.** *Une montre marque midi, en sorte que l'aiguille des minutes est sur celle des heures. Quand se fera la prochaine rencontre des deux aiguilles?*

L'aiguille des heures parcourt, en 1 heure, 1 division du cadran, et l'aiguille des minutes en parcourt 12, c'est-à-dire 11 de plus. On peut dire d'ailleurs que l'aiguille des minutes est en retard de 12 divisions sur celle des heures. Donc l'aiguille des minutes mettra autant de temps pour atteindre celle des heures que 11 divisions sont contenues de fois dans 12 divisions, ou $12 : 11 = 1\frac{1}{11}$ heure.

Ainsi la première rencontre des deux aiguilles aura lieu à $1\frac{1}{11}$ heure.

670. Problème **144.** *Quel est le nombre de chiffres nécessaire pour écrire tous les nombres de 1 à 99999? Si l'on écrit la suite naturelle des nombres sans séparer les différents chiffres, quel sera le millionième chiffre de cette suite, et à quel nombre appartient-il?*

1° La suite des chiffres de 1 à 99999 se compose de 9 nombres d'un chiffre, de 90 nombres de deux chiffres, de 900 nombres de trois chiffres, de 9000 nombres de quatre chiffres, de 90000 nombres de cinq chiffres. Il faut donc, pour écrire tous les nombres de 1 à 99999, un nombre de chiffres égal à

$$9 + 2.90 + 3.900 + 4.9000 + 5.90000 = \mathbf{488889.}$$

2° Le nombre de chiffres nécessaire pour écrire tous les nombres de 1, 2, 3, 4, 5 chiffres est 488889. Pour avoir un million de chiffres, il faut donc encore en écrire 511111. Or, si l'on divise 511111 par 6, le quotient est 185185 et le reste 1. Il faut donc écrire, à partir et à compter du nombre 100000, 185185 nombres de six chiffres, plus encore le premier chiffre du nombre suivant. Il résulte de là que le millionième chiffre cherché est le premier chiffre **1** du nombre **185185.**

***671.** Problème **145.** *Lorsqu'on soustrait un même nombre des deux termes d'une fraction plus grande que l'unité, cette fraction augmente. Qu'y a-t-il à dire si le nombre que l'on soustrait est égal au dénominateur de la fraction donnée?*

Soit, par exemple, la fraction $\frac{13}{8}$. Si, des deux termes de cette fraction, on soustrait le dénominateur 8, on obtient $\frac{5}{0}$, *symbole qui n'offre pas de sens par lui-même.*

Pour l'interpréter, supposons qu'au lieu de soustraire 8 des deux termes de la fraction $\frac{13}{8}$, on soustraie successivement les nombres

7·9, 7·99, 7·999, 7·9999, 7·99999, etc.,

qui ont pour limite 8 (**316**) ; on obtiendra respectivement

51, 501, 5001, 50001, 500001, etc.

Ainsi, quand on soustrait des deux termes de la fraction $\frac{13}{8}$ des nombres de plus en plus rapprochés du dénominateur 8, la fraction prend des valeurs de plus en plus grandes, et *qui peuvent dépasser tout nombre donné, quelque grand qu'il soit.* C'est ce que l'on exprime en disant que la fraction *tend vers l'infini,* ou que $\frac{5}{0}$, forme qu'elle prend à la limite, est le *symbole de l'infini.*

***672.** Problème **146**. *Quelle est la plus grande puissance du nombre premier* 7 *qui divise le produit des* 1000 *premiers nombres?*

Il faut chercher le nombre des facteurs 7 qui entrent dans le produit des 1000 premiers nombres.

Or, dans la suite des 1000 premiers nombres, il y en a 1000 : 7 ou 142 qui renferment le facteur 7 au moins une fois. Ce sont les nombres 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, etc.

Dans ces 142 nombres, il y en a 142 : 7 ou 20 qui renferment le facteur 7 au moins deux fois. Ce sont les nombres 49, 98, 147, etc.

Enfin, dans ces 20 nombres, il y en a 20 : 7 ou 2 qui renferment le facteur 7 trois fois.

Le nombre des facteurs 7 qui entrent dans le produit des 1000 premiers nombres est donc $142 + 20 + 2 = \mathbf{164}$.

Par suite, la plus grande puissance de 7 qui divise le produit des 1000 premiers nombres est $\mathbf{7}^{164}$.

SUPPLÉMENT

673. Théorème I. *Dans toute division de deux nombres entiers, si l'on multiplie ou si l'on divise à la fois le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient entier ne change pas, mais le reste est multiplié ou divisé par ce nombre.*

Pour la démonstration de la première partie, voir le n° **81**, 1°.

Dans la seconde partie, on suppose que la division du dividende A et du diviseur B par le nombre entier m se fait sans reste. Si donc on appelle a et b les quotients, on aura $A = am$ et $B = bm$.

Cela posé, soient Q le quotient entier de A par B, et R le reste. Soient, de même, q le quotient entier de a par b, et r le reste. Je dis que l'on a $q = Q$ et $r = R : m$.

En effet, le quotient entier de a par b étant q et le reste r, si l'on multiplie le dividende a et le diviseur b par m, le quotient entier de am par bm, ou de A par B, sera, *d'après la première partie du théorème*, égal à q, et le reste à rm. Mais, *par hypothèse*, le quotient entier de A par B est Q et le reste R. On a donc $q = Q$ et $rm = R$, ou $q = Q$ et $r = R : m$, ce qu'il fallait démontrer.

674. Théorème II. *Pour trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres, on divise, par le plus petit de ces nombres, chacun des autres nombres; on opère de la même manière sur le plus petit nombre et les restes obtenus, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à des nombres dont le plus petit divise chacun des autres : ce plus petit nombre est le plus grand commun diviseur des nombres donnés.*

Soient, par exemple, les quatre nombres A, B, C, D, et D le plus petit. Soient m, n, p les quotients de A, B, C par D, et A′, B′, C′ les restes. Je dis que le plus grand commun diviseur des nombres A, B, C, D est le même que celui des nombres A′, B′, C′, D.

En effet, des égalités

$$A = mD + A', \qquad B = nD + B', \qquad C = pD + C',$$

on déduit : 1° que *tout commun diviseur des nombres* A, B, C, D *est un commun diviseur des nombres* A′, B′, C′, D; 2° que *tout commun diviseur des nombres* A′, B′, C′, D *est un commun diviseur des nombres* A, B, C, D. Il suit de là que les nombres A, B, C, D et les nombres A′, B′, C′, D ont les mêmes communs diviseurs, et, par suite, *le même plus grand commun diviseur*, ce qui démontre le théorème.

Le théorème subsiste si l'on prend les quotients par excès, ou si l'on remplace les restes par leurs compléments au diviseur.

Cette manière de trouver le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres est souvent plus rapide que celle qui a été donnée au n° **169**.

675. Théorème III. *Le produit de* n *nombres entiers est égal à leur plus petit commun multiple multiplié par le plus grand commun diviseur de leurs produits* n — 1 *à* n — 1.

Ce théorème est la généralisation de celui qui a été démontré sous les n^os^ **184** et **202**.

Considérons les cinq nombres A, B, C, D, E, et appelons m le plus petit commun multiple de ces cinq nombres, et d le plus grand commun diviseur de leurs produits quatre à quatre, c'est-à-dire des produits BCDE, ACDE, ABDE, ABCE, ABCD.

Le produit ABCDE est un commun multiple des nombres A, B, C, D, E, et, par suite, un multiple de leur plus petit commun multiple m (**188**). On peut donc poser

$$(1) \qquad ABCDE = mP.$$

D'autre part, d, divisant BCDE, divise ABCDE, qui est son multiple. On peut donc aussi poser

$$(2) \qquad ABCDE = dQ,$$

et, dès lors, on a

$$(3) \qquad mP = dQ.$$

m étant un multiple de A, soit $m = h\mathrm{A}$. L'égalité (1) deviendra

$$\mathrm{ABCDE} = h\mathrm{AP}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{BCDE} = h\mathrm{P}.$$

Ainsi P divise BCDE. On démontrerait, de même, que P divise ACDE, ABDE, ABCE, ABCD. Donc P est un commun diviseur des produits quatre à quatre des cinq nombres A, B, C, D, E, et, par suite, P divise le plus grand commun diviseur d de ces produits (**170**). On a donc

$$(4) \qquad d = \mathrm{PR}.$$

d divisant BCDE, soit $\mathrm{BCDE} = kd$. L'égalité (2) deviendra

$$\mathrm{A}kd = d\mathrm{Q}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{A}k = \mathrm{Q}.$$

Ainsi Q est un multiple de A. On démontrerait, de même, que Q est un multiple de B, de C, de D, de E. Donc Q est un commun multiple des nombres A, B, C, D, E, et, par suite, un multiple de leur plus petit commun multiple m (**188**). On a donc encore

$$(5) \qquad \mathrm{Q} = m\mathrm{S}.$$

Multiplions les égalités (3), (4), (5) membre à membre, et supprimons les facteurs communs aux deux produits obtenus ; on aura

$$1 = \mathrm{RS},$$

d'où $\mathrm{R} = 1$, $\mathrm{S} = 1$, et, par suite, $\mathrm{P} = d$, $\mathrm{Q} = m$, et, dès lors,

$$\mathrm{ABCDE} = md,$$

ce qu'il fallait démontrer.

TABLE DES MATIÈRES

—

LIVRE PREMIER. — LES OPÉRATIONS SUR LES NOMBRES ENTIERS.

Chapitre I. Numération 11
Numération romaine 17
Chapitre II. Addition 18
Chapitre III. Soustraction 23
Chapitre IV. Multiplication 28
Chapitre V. Division 38
Méthode des compléments 49
Chapitre VI. Élévation aux puissances 55
Règle pour former le carré d'un nombre 56
Chapitre VII. Extraction des racines 57
Extraction de la racine carrée. 58
Extraction de la racine cubique 66
Extraction d'une racine de degré quelconque 76
Cas où le degré de la racine est un produit de plusieurs nombres 78
Chapitre VIII. Recherche de l'exposant. 79
Chapitre IX. De quelques procédés de calcul rapide 81
Chapitre X. Nombre et nature des opérations arithmétiques 83
Chapitre XI. Des divers systèmes de numération 84

LIVRE DEUXIÈME. — LES PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES DES NOMBRES ENTIERS.

Chapitre I. Caractères de divisibilité 87
Divisibilité par 2 et 5, 4 et 25, 8 et 125 91
Divisibilité par 3 et par 9 93
Divisibilité par 11 94
Divisibilité par 4, 6, 8, 12, 15, 18, 45 96
Recherche des caractères de divisibilité 96
Divisibilité par 7 97
Divisibilité par 7, 11, 13, 27, 37 100
Recherche des diviseurs d'un nombre 100
Chapitre II. Preuves par un diviseur quelconque des opérations sur les nombres entiers. 101
Méthode du chiffre unique 103
Chapitre III. Des nombres premiers 106
Chapitre IV. Du plus grand commun diviseur de deux ou de plusieurs nombres 109
Chapitre V. Des nombres premiers entre eux 117
Extension des caractères de divisibilité 121
Chapitre VI. Du plus petit commun multiple de deux ou de plusieurs nombres 121

Chapitre VII. Décomposition des nombres en leurs facteurs premiers . . 126
Chapitre VIII. Des diviseurs simples et composés des nombres 130
Nombres parfaits et nombres amiables 132
Chapitre IX. Composition du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple de deux ou de plusieurs nombres . 133

LIVRE TROISIÈME. — LES FRACTIONS ORDINAIRES.

Chapitre I. Des fractions ordinaires 140
Chapitre II. Simplification des fractions 146
Chapitre III. De la réduction de plusieurs fractions à un même dénominateur 149
Chapitre IV. Addition et soustraction des fractions 151
Chapitre V. Multiplication des fractions 153
Méthode des parties aliquotes 157
Chapitre VI. Division des fractions 158
Nombres réciproques 163
Chapitre VII. Élévation aux puissances et extraction des racines des fractions 163
Extraction des racines à moins d'une unité entière ou fractionnaire 165
Chapitre VIII. Des fractions en général 169

LIVRE QUATRIÈME. — LES NOMBRES DÉCIMAUX.

Chapitre I. Des nombres décimaux 173
Chapitre II. Opérations sur les nombres décimaux 177
Chapitre III. Extraction abrégée de la racine carrée 185
Chapitre IV. Extraction abrégée de la racine cubique 190
Chapitre V. De la conversion des fractions ordinaires en fractions décimales 196
Les génératrices considérées comme limites 199
Chapitre VI. Des fractions décimales périodiques 200
Recherche de la génératrice 202
Fractions décimales périodiques dont la période est 9 . . . 201
Opérations sur les fractions décimales périodiques 208
Chapitre VII. Des nombres incommensurables 209
Chapitre VIII. Des erreurs absolues 212
Addition abrégée 213
Soustraction abrégée 214
Multiplication abrégée 214
Division abrégée 216
Chapitre IX. Des erreurs relatives 219
Chapitre X. Problèmes sur les approximations numériques 223

LIVRE CINQUIÈME. — LES RAPPORTS ET LES PROPORTIONS.

Chapitre I. Des rapports 232
Chapitre II. Des proportions 233
Chapitre III. Des suites de rapports égaux 240

LIVRE SIXIÈME. — LES PROGRESSIONS ET LES LOGARITHMES.

Chapitre I. Des progressions par différence 243
Chapitre II. Des progressions par quotient 245
Chapitre III. Des logarithmes en général 248
Chapitre IV. Des logarithmes décimaux 253
Des cologarithmes 255
Chapitre V. Usage des tables de logarithmes 255
Chapitre VI. De la règle à calcul 261

LIVRE SEPTIÈME. — LES MESURES.

Chapitre I. De la formation d'un système général et uniforme de mesures 263
Système métrique ou système décimal des poids et mesures . 264
Pays qui ont adhéré au système métrique 266
Chapitre II. Les mesures décimales 266
Mesure des angles et des arcs de cercle 267
Mesures de longueur; définition du mètre 267
Mesures de surface 269
Mesures agraires 270
Mesures de volume 270
Mesures pour le bois de chauffage 272
Mesures de capacité 272
Poids; définition du kilogramme 273
Correspondance entre les unités de poids, de volume et de capacité 274
Abréviations pour les mesures métriques 275
Chapitre III. Les mesures complexes 275
Mesure des angles et des arcs de cercle 275
Mesure du temps; fuseaux horaires; calendrier perpétuel julien et grégorien 276
Mesures pour le vin et le papier et les objets qui se vendent au nombre 279
Mesures anglaises 280
Lieues et milles 281
Chapitre IV. Les monnaies 281
Monométallisme et bimétallisme 283
Union latine 284
Monnaies de compte des principaux pays 287
Chapitre V. Mesures anciennes de France 288
Chapitre VI. Mesures anciennes de Belgique 290
Mesures métriques (anciennes dénominations) 295
Chapitre VII. Calcul des nombres complexes 295
Chapitre VIII. Méthode des parties aliquotes 301
Chapitre IX. Du meilleur système de numération et de poids et mesures. 307

LIVRE HUITIÈME. — DE LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES.

Chapitre I. De la résolution des problèmes en général 311
Chapitre II. Règle de trois 313
Chapitre III. Méthode de réduction à l'unité 316
Chapitre IV. Méthode de réduction au même coefficient 319
Chapitre V. De la règle conjointe 323
Chapitre VI. Solutions rétrogrades. 327
Chapitre VII. Méthode de fausse position 329
Chapitre VIII. Partages proportionnels. 332
Chapitre IX. Des moyennes 338
Chapitre X. Des mélanges et des alliages 340
Chapitre XI Du titre des matières d'or et d'argent 343
Chapitre XII. Des poids spécifiques 347
Chapitre XIII. Du tant pour cent ou pour mille 349
Des pertes et des bénéfices 350
De la remise ou rabais ou escompte 351
Prime ou perte sur l'or et l'argent 351
De la tare 352
Des assurances 353
Des centimes additionnels 353
Évaluations diverses à tant pour cent ou pour mille . . . 353
Chapitre XIV. De l'intérêt 355
Intérêt simple 356
Méthode des nombres et des diviseurs 359
Méthode des parties aliquotes 360
Caisse d'Épargne sous la garantie de l'État 361
Intérêt composé. 362
Chapitre XV. De l'escompte 367
Escompte en dehors 368
Méthode THOYER 370
Escompte en dedans 376
De l'escompte composé 381
Chapitre XVI. Des rentes sur l'État 382
Obligations des villes et des sociétés 385
Des opérations de Bourse 386
Chapitre XVII. Du change et des arbitrages 388
Chapitre XVIII. Des comptes courants et d'intérêts 391
Chapitre XIX. Des annuités 396
Chapitre XX. Questions sur la population. 401
Chapitre XXI. Problèmes du second degré 402
Chapitre XXII. Problèmes divers 405

SUPPLÉMENT aux nos **81, 169, 184** et **202** 410